

chem 730/55

# ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG  
DES VERBANDES  
DEUTSCHER PHYSIKALISCHER GESELLSCHAFTEN

VON

M. VON LAUE UND R. W. POHL

140. BAND 2. HEFT

MIT 37 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 12. FEBRUAR 1955)



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG  
SPRINGER - VERLAG

1955

Begründet 1920. Herausgegeben unter Mitwirkung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft von *K. Scheel* und *H. Geiger*, ab Band 129 herausgegeben unter Mitwirkung des Verbandes Deutscher Physikalischer Gesellschaften. Band 1—4 (1921): Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn. Ab Band 5: Berlin, Springer.

Die „*Zeitschrift für Physik*“ erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 62.—.

Die Zeitschrift für Physik ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht. Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote u. ä. von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Manuskriptsendungen sind zu richten an einen der Herren Herausgeber: Professor Dr. M. von Laue, Berlin-Dahlem, Faradayweg 4—6; Professor Dr. R. W. Pohl, Göttingen, Bunsenstr. 9.

Autorenkorrekturen, d.h. nachträgliche Textänderungen werden, soweit sie 10 % der Satzkosten übersteigen, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

## Springer-Verlag OHG.

Berlin W 35, Reichpietschufer 20, Tel. 24 92 51,

Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24, Tel. 24 40,

Göttingen, Weenderstraße 60, Tel. 21 53.

## Inhalt.

	Seite
MAECKER, H., TH. PETERS und H. SCHENK, Ionen- und Atomquerschnitte im Plasma verschiedener Gase. Mit 13 Figuren im Text. (Eingegangen am 15. September 1954) . . . . .	119
GOBRECHT, H., und W. WEISS, Lumineszenzuntersuchungen an Uran-aktivierten Erdalkaliwolframaten und -molybdaten. Mit 4 Figuren im Text. (Eingegangen am 20. Oktober 1954) . . . . .	139
SAUTER, F., und J. WEISSE, Zur Theorie der inneren Feldemission. Mit 1 Figur im Text. (Eingegangen am 5. November 1954) . . . . .	150
PARTHASARATHY, S., C. B. TIPNIS und M. PANCHOLY, Dämpfung von Ultraschallwellen in Flüssigkeiten. Mit 1 Figur im Text. (Eingegangen am 6. November 1954) . . . . .	156
SCHERRER, W., Berichtigung und Ergänzung „zur linearen Feldtheorie“. (Eingegangen am 6. Dezember 1954) . . . . .	160
SCHERRER, W., Zur linearen Feldtheorie. II. (Schwache Felder.) (Eingegangen am 25. November 1954) . . . . .	164
OLDEKOP, W., Zur Theorie der Leitfähigkeit und Viskosität von Salzschmelzen. Mit 4 Figuren im Text. (Eingegangen am 7. November 1954) . . . . .	181
HÖHLER, G., Wechselwirkung eines nichtrelativistischen Teilchens mit einem skalaren Feld für mittlere Kopplung. I. Mit 2 Figuren im Text. (Eingegangen am 16. November 1954) . . . . .	192
EDER, G., Zerfall und Erzeugung von $\Delta$ -Teilchen. Mit 1 Figur im Text. (Eingegangen am 19. November 1954) . . . . .	215
LEGLER, W., Zur Statistik der Elektronenlawinen. Mit 11 Figuren im Text. (Eingegangen am 19. November 1954) . . . . .	221



## Ionen- und Atomquerschnitte im Plasma verschiedener Gase.

Von

H. MAECKER, TH. PETERS und H. SCHENK.

Mit 13 Figuren im Text.

(Eingegangen am 15. September 1954.)

Die bekannten Zusammenhänge zwischen der Temperatur und der Leitfähigkeit in einer Bogenentladung werden benutzt, um die Wirkungsquerschnitte der den Elektronenstrom bremsenden Ionen und Atome aus Stromstärke, Feldstärke, Elektronendichte- und Temperaturverteilungen verschiedener Bogenentladungen zu ermitteln. Die Ionenquerschnitte stimmen recht gut mit den von SPITZER berechneten überein. Atomquerschnitte für die Elemente H, C, N, O und Fe werden mitgeteilt.

### I. Einführung.

Bei der Beschreibung der Leitfähigkeit eines Plasmas muß man bis auf die Wirkungsquerschnitte der Ionen und Atome gegenüber Elektronenstoß zurückgehen, weil diese die Zahl der Zusammenstöße zwischen Elektronen und den übrigen Plasmapartnern und damit die mittlere Driftgeschwindigkeit der Elektronen bestimmen. Die Geschwindigkeit bei der Feldstärke Eins, die Beweglichkeit, ist neben der Elektronenkonzentration die entscheidende Größe für die Leitfähigkeit.

Zur Messung der Wirkungsquerschnitte kann man sich hinreichend zylindersymmetrischer Bogenentladungen bedienen, für die man zunächst aus dem Verhältnis von Stromstärke zur Feldstärke den Leitwert je Längeneinheit ermittelt. Die gleiche Größe sollte sich ergeben, wenn man mit Hilfe der gemessenen radialen Temperaturverteilung die spezifische Leitfähigkeit, in die die Wirkungsquerschnitte eingehen, berechnet und diese über die Querschnittsfläche des Bogens integriert. So sind jedenfalls die Wirkungsquerschnitte der Ionen und Neutralteilchen einzusetzen. Damit ist die Bestimmungsmethode für die spezifische Leitfähigkeit und für die gesuchten Wirkungsquerschnitte kurz skizziert.

In dieser Abhandlung soll nun die bereits mitgeteilte Messung des Ionenquerschnittes am wasserstabilisierten Hochleistungsbogen einer kritischen experimentellen Nachprüfung unterzogen und mit neuen theoretischen Berechnungen von L. SPITZER und Mitarbeitern verglichen werden. Sodann wird über die Bestimmung des RAMSAUER-Querschnitts der neutralen H- und O-Atome im *normalen* wasserstabilisierten Bogen, wie er von G. JÜRGENS eingehend untersucht worden ist, berichtet. Diese Meßergebnisse werden gestützt durch Untersuchungen am

wasserstabilisierten Hochdruckbogen, der nach den Arbeiten von TH. PETERS noch wesentlich geeigneter für diesen Zweck ist. Weiter werden die gleichen Methoden auf die von H. MAECKER durchgemessene Säule des Hochstromkohlebogens angewendet, um daraus die Wirkungsquerschnitte von C-, N- und O-Atomen zu gewinnen. Schließlich werden die von F. BURHORN ausgeführten Messungen am Fe-Pfund-Bogen herangezogen, um auch für die Fe-Atome die RAMSAUER-Querschnitte zu finden.

## II. Grundlagen der Meßmethode.

Bei einer zylindersymmetrischen Bogenentladung kann man aus den gemessenen Werten für die Stromstärke  $J$  und die Feldstärke  $E$  den elektrischen Leitwert je Längeneinheit  $\Sigma$  nach dem OHMSchen Gesetz finden zu

$$\Sigma = \frac{J}{E}. \quad (1)$$

Zum gleichen Ergebnis muß man kommen, wenn man die spezifische Leitfähigkeit  $\sigma$  über den Bogenquerschnitt integriert:

$$\Sigma = 2\pi \int_0^R \sigma(r) r dr. \quad (2)$$

Da nun die lokale Leitfähigkeit nicht direkt der Messung zugänglich ist, wohl aber die radiale Temperaturverteilung, muß über die gaskinetische Vorstellungen vom Ladungstransport der Elektronen im Plasma — der Anteil der Ionen ist wegen ihrer sehr geringen Beweglichkeit zu vernachlässigen — ein Zusammenhang zwischen Temperatur und Leitfähigkeit gesucht werden.

Auf das Elektronengas wirkt einmal die Kraft des elektrischen Feldes  $eE$  und zum anderen die durch Zusammenstöße der Elektronen mit den übrigen Plasmapartnern erzeugte Reibungskraft, welche als abgegebener Impuls in der Zeiteinheit definiert ist. Bewegt sich das Elektronengas mit der mittleren Driftgeschwindigkeit  $v$ , so gibt ein Elektron pro Stoß den Impuls  $m_e v$  ab, wobei als Stoß alle die Vorgänge gezählt werden sollen, durch die die Impuls Komponente in Feldrichtung im Mittel vollständig abgegeben wird. Finden in der Zeiteinheit  $\gamma$  derartige Stöße statt, dann ist die Impulsabgabe pro Zeiteinheit und damit die Reibungskraft  $\gamma m_e v$ . Die Driftgeschwindigkeit  $v$  stellt sich nun so ein, daß sich antreibende Feldkraft und Reibung die Waage halten:

$$eE = \gamma m_e v. \quad (3)$$

Die reziproke Stoßzahl ist die Stoßzeit  $\tau$ , die wir einfach aus der thermischen Geschwindigkeit  $v_{th}$  und der freien Weglänge  $\lambda_e$  der Elektronen bestimmen:

$$\gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{v_{th}}{\lambda_e}. \quad (4)$$



Die sich einstellende Driftgeschwindigkeit berechnet sich so zu

$$v = \frac{e}{m_e} \frac{\lambda_e}{v_{th}} E = b_e E, \quad (5)$$

worin der vor der Feldstärke stehende Faktor als Beweglichkeit  $b_e$  bezeichnet ist. Die strenge Ableitung dieser Beziehung nach der statistischen Mechanik fügt noch einen Zahlenfaktor hinzu, der aber nahe bei Eins liegt, und den wir uns in das  $\lambda_e$  hineingezogen denken wollen. Aus der Elektronengeschwindigkeit folgt die Stromdichte durch Multiplikation mit der Ladungsdichte des Elektronengases  $e \cdot n_e$  zu

$$j = e \cdot n_e b_e E, \quad (6)$$

was dem OHmschen Gesetz entspricht, wenn man als Leitfähigkeit

$$\sigma = e \cdot n_e b_e \quad (7)$$

definiert. Führt man in (5) noch die gaskinetischen Beziehungen

$$v_{th} = \sqrt{\frac{3 k T}{m_e}} \quad (8)$$

und

$$\lambda_e = \frac{1}{n_0 Q_0 + n_+ Q_+} \quad (9)$$

ein, dann ist nach (7) die Leitfähigkeit auf die Temperatur  $T$ , auf die Elektronenkonzentration  $n_e$  und auf die beiden Wirkungsquerschnitte der Atome  $Q_0$  und der Ionen  $Q_+$  gegenüber Elektronenstoß zurückgeführt:

$$\sigma = \frac{e^2 n_e}{\sqrt{3 m_e k T}} \frac{1}{n_0 Q_0 + n_+ Q_+}. \quad (10)$$

Hierbei ist  $n_e$  noch mit  $T$  durch die SAHA-Gleichung

$$\frac{n_{Z+1}}{n_Z} \cdot n_e = \frac{2 U_{Z+1}}{U_Z} \cdot \frac{(2\pi m k T)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^{-\frac{E_Z}{k T}} \quad (11)$$

( $Z$  = Ionenladungszahl,  $U$  = Zustandssumme,  $E_Z$  = Ionisierungsenergie) und durch die Forderung nach Quasineutralität  $\sum Z n_Z = n_e$  verbunden. Aus (1), (2) und (10) folgt dann

$$\frac{J}{E} = 2\pi \frac{e^2}{\sqrt{3 m_e}} \cdot \int_0^R \frac{n_e}{\sqrt{k T}} \cdot \frac{1}{n_0 Q_0 + n_+ Q_+} r dr. \quad (12)$$

Auf diese Gleichung werden wir uns bei den folgenden Auswertungen stützen. Im Bedarfsfall kann der Term  $n_0 Q_0$  bei Anwesenheit mehrerer Atomarten in  $n_1 Q_1 + n_2 Q_2 + \dots$  und der Term  $n_+ Q_+$  bei Anwesenheit mehrfach geladener Ionen in  $n_+ Q_+ + n_{++} Q_{++} + \dots n_{Z+} Q_{Z+}$  aufgeteilt werden.

Bei der Betrachtung der Genauigkeit wollen wir zwei Extremfälle unterscheiden: Im ersten Fall möge  $n_+ Q_+ \gg n_0 Q_0$  sein. Hierzu braucht der Ionisationsgrad gar nicht besonders hoch zu sein, weil der Ionenquerschnitt  $Q_+$  selbst schon durch das weitreichende COULOMB-Feld der Ionen im allgemeinen viel größer als der RAMSAUER-Querschnitt  $Q_0$  ist. Ist also obige Ungleichung erfüllt, so kann man näherungsweise  $n_e$  gegen  $n_+$  kürzen und es bleibt nur eine geringe Temperaturabhängigkeit übrig. Ist im zweiten Fall  $n_0 Q_0 \gg n_+ Q_+$ , dann bleibt das nach der SAHA-Gleichung (14) sehr temperaturempfindliche  $n_e$  im Integral stehen, und es ist unerlässlich,  $n_e$  direkt zu messen, woraus anschließend  $T$  mit Hilfe Gl. (14) berechnet werden kann. Wenn man so verfährt, ist auch in diesem Fall die Methode recht genau.

### III. Der Ionenquerschnitt.

#### a) Die Meßmethode am Hochleistungsbogen.

Zur Messung der Ionenquerschnitte empfiehlt es sich, einen Bogen zu verwenden, bei dem der Gesamtquerschnitt  $n_0 Q_0$  der Neutralteilchen zu vernachlässigen ist oder nur eine kleine Korrektur darstellt, also einen Bogen möglichst hohen Ionisationsgrades. Diese Bedingung erfüllt in hohem Maße der wasserstabilisierte Hochleistungsbogen (GERDIEN-Bogen [1]), der in einem durch rotierendes Wasser gebildeten Kanal von 2,3 mm  $\varnothing$  brennt und bei Stromstärken bis zu 1500 Amp Achsentemperaturen bis über 50000° K aufweist [2], [3]. In diesem Bogen sind sowohl die Feldstärken [4] als auch die radialen Temperaturfunktionen für eine Reihe von Stromstärken gemessen worden. Damit kann nach Gl. (1) zunächst der Leitwert/cm =  $J/E$  angegeben werden. Ferner können bei jeder Temperatur die verschiedenen Teilchenzahlen/cm<sup>3</sup> für H- und O-Atome, für ein- und mehrfach geladene O-Ionen und für die Elektronen unter Verwendung der SAHA-Gleichung (11), der chemischen Formel für Wasser H<sub>2</sub>O und des Gesamtdruckes berechnet werden. Schließlich benötigen wir noch den von GVOSDOVER [5] u. a. theoretisch ermittelten Ionenquerschnitt

$$Q_+^{\text{th}} = \frac{\pi}{2} \frac{e^4}{(h T)^2} \ln \left( \frac{3}{2} \frac{k T}{e^2 n_+^{\frac{1}{2}}} \right), \quad (13)$$

der sich nach der RUTHERFORDSchen Streuformel auf  $Z$ -fach geladene Ionen mit Hilfe des Zusammenhangs

$$Q_{Z+} = Z^2 Q_+ \quad (14)$$

übertragen läßt.

Mit diesen Beziehungen können wir das Integral in (12) ausführen und die rechte Seite der Gleichung mit dem für jede Stromstärke gemessenen Leitwert/cm auf der linken Seite von (12) vergleichen. Diese



Auswertung ist in einer früheren Arbeit von uns [6] ausgeführt worden und führt nur dann zur Übereinstimmung beider Seiten, wenn man für den GVOSDOVER-Querschnitt  $Q_+^{\text{th}}$  einen um den Faktor 0,55 verkleinerten Wert einsetzt:

$$Q_+ = 0,55 Q_+^{\text{th}}. \quad (15)$$

Obwohl dieses Ergebnis nach wie vor als richtig anzusehen ist, waren doch gewisse Unstimmigkeiten vorhanden, zu deren Aufklärung eine Prüfung der gemessenen Temperaturverteilungen notwendig war.

Die seinerzeit verwendete und auch hier wieder herangezogene Temperaturmeßmethode stammt von R. W. LARENZ [2] und geht auf die bekannte Abhängigkeit der Intensität einer Spektrallinie von der Temperatur zurück:

$$i_L \sim n_L(T) e^{-E_m/kT}. \quad (16)$$

Danach steigt die Intensität der Spektrallinien zunächst nach Maßgabe des BOLTZMANN-Faktors an, bei hohen Temperaturen jedoch überwiegt die Abnahme der Teilchenzahl  $n_L(T)$  durch die Ionisierung dieser Teilchen, so daß dann die Intensität nach Durchlaufen eines Maximums trotz steigender Temperatur wieder abnimmt. Man kann nun die Temperatur, bei der das Maximum liegt, aus Gl. (16) berechnen, und demjenigen Bogenradius, in dem die maximale Intensität der Spektrallinie festgestellt wird, diese Temperatur zuordnen. Weiter kann man von diesem Fixpunkt aus nach innen und nach außen durch Vergleich der relativen Intensitäten den radialen Temperaturverlauf in der Umgebung des Maximums ermitteln. Bei der Messung am Hochleistungsbogen zeigte sich, daß nicht nur die Linien der Neutralteilchen H und O, sondern auch die Linien der einfachen Sauerstoffionen ein Maximum und eine Einsenkung in der Bogenachse aufweisen. Im Extremfall waren sogar noch die Linien des zweifach ionisierten Sauerstoffs eingesenkt. All diese Maxima dienten als Temperaturfixpunkte, mit deren Hilfe die radialen Temperaturverteilungen gezeichnet werden konnten. Bei der Bestimmung des Temperaturverlaufs in der Umgebung der Maxima aus ein und derselben Spektrallinie traten jedoch Abweichungen auf dergestalt, daß der Temperaturverlauf immer flacher verlief als die durch die Fixpunkte gelegte Kurve hätte erwarten lassen (Fig. 1 punktiert). Diese

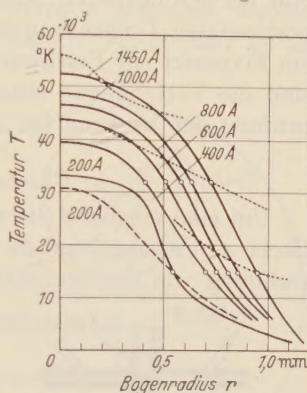


Fig. 1. Temperaturverteilungen im wasserstabilisierten Hochleistungsbogen (GERDIEN-Bogen) mit 2,3 mm Kanaldurchmesser. Die punktierten Kurven sind aus dem relativen Intensitätsverlauf je einer einzigen Linie entstanden und zeugen von der Unruhe des Bogens im Kanal. Die gestrichelte Kurve ist die frühere unkorrigierte Verteilung bei 200 Amp.

Unstimmigkeit wurde seinerzeit zurückgeführt auf Verwaschungen der Spektrallinien in der Längsrichtung durch die möglichen Unebenheiten des Wassers an seiner inneren Kanaloberfläche, denn die Intensitätsmessung geschah von der Seite durch ein Quarzfenster und durch die den Kanal bildende Wasserschicht. Die Verwaschung ändert jedoch nicht den durch mehrere Fixpunkte festgelegten Temperaturverlauf, weil die Lage der Maxima durch sie praktisch nicht beeinträchtigt wird. Nur bei den mittleren Stromstärken ( $\approx 200$  Amp), bei denen außer der horizontalen Tangente in der Bogenachse und dem Randwert nur noch ein Fixpunkt zur Festlegung des radialen Temperaturverlaufs existiert, sind die Verteilungen unsicher. Dieses war ein Grund, der die Überprüfung der Messung bei 200 Amp veranlaßte.

### b) Überprüfung früherer Messungen.

Um eine mögliche Streuung des Lichtes an der inneren Kanaloberfläche zu umgehen und die bei seitlicher Beobachtung notwendige Umrechnung von der beobachteten Querverteilung der Intensität auf die

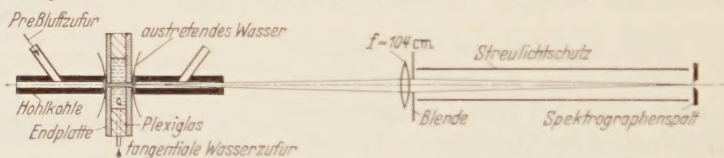


Fig. 2. Anordnung zur end-on-Beobachtung des 200 Amp-Hochleistungsbogens.

radiale Verteilung zu vermeiden, wurde in Verlängerung der Bogenachse (end on) beobachtet. Dabei ist allerdings der Umstand von Nachteil, daß aus dem Bogenkanal nach beiden Seiten ein intensiver Plasmastrahl austritt, in dem die Temperatur stetig abfällt, so daß bei end-on-Beobachtung nicht nur das Leuchten im eigentlichen Bogenkanal, sondern auch in den inhomogenen Schichten zwischen den Kanalenden und den Elektroden wirksam wird. Um diesen Übelstand zu beseitigen, sind die durchbohrten Kohlelektroden ganz dicht an den Kanal herangeführt (Fig. 2). Mit Hilfe eines Preßluftstrahles durch die Elektrodenbohrung in Richtung auf den Bogen wird dafür gesorgt, daß das austretende Plasma unmittelbar nach seinem Austritt aus dem Kanal zur Seite gedrängt wird. Dadurch wird die inhomogene Schicht so stark verkürzt, daß sie klein bleibt gegenüber der Gesamtlänge des Bogens von 2 cm.

Trotz dieser Vorsichtsmaßnahme sind doch noch Möglichkeiten gegeben, die eine Verwaschung des Intensitätsverlaufes entlang einer Spektrallinie hervorrufen können. Diese sind:

1. Mangelhafte Schärfentiefe trotz starker Abblendung der Optik,
2. mangelhaftes Auflösungsvermögen wegen der starken Abblendung der Optik,



3. Ablenkung der aus dem Bogen austretenden Lichtstrahlen durch die Schlierenbildung in den inhomogenen Schichten vor den Elektroden.

Für die Abblendung der Optik wurde ein solcher Öffnungswinkel gewählt, daß die Tiefenschärfe und das Auflösungsvermögen einander gleich sind, weil dann die Abbildungsschärfe optimal ist. Für die gewählte Anordnung betrug der Öffnungswinkel 1:70, entsprechend einem Auflösungsvermögen von 0,1 mm am Ort des Bogens. Dieses Auflösungsvermögen wurde nicht nur durch die Rechnungen gefunden, sondern auch durch Messung bestätigt, indem ein dünner Platindraht an der Stelle der Bogenachse zum Glühen gebracht und sein Bild in der Ebene des Spektrographenspaltes aufgenommen und vermessen wurde.

Um die Wirkung der Ablenkung durch die Schlieren zu prüfen, wurde das Licht einer Quecksilberlampe, aus der durch Zwischenabbildung ein sehr kleiner Teil mit Hilfe einer feinen Lochblende herausgeblendet war, durch den brennenden Bogen hindurchgeschickt und die Größe der punktförmigen Quecksilberlinien im Spektrum des Hochleistungsbogens gemessen. Dabei ergab sich, daß diese Punkte zwar etwas größer waren als bei den Aufnahmen ohne brennenden Bogen, daß aber das Auflösungsvermögen der gesamten Apparatur dadurch nicht wesentlich beeinträchtigt wird, zumal wenn man bedenkt, daß das Quecksilberlicht beide inhomogene Schichten durchdringen muß, während das Licht aus dem Bogen nur eine dieser Schichten durchstrahlt. (Von der Wiedergabe einer solchen Aufnahme mußte abgesehen werden, weil die außerordentlich feinen Hg-Linienpunkte in der Reproduktion untergehen würden.)

Trotz der geringen Beeinträchtigung des Auflösungsvermögens durch die drei oben genannten Vorgänge wurde die gemessene Intensitätsverteilung mit der gemessenen Apparatfunktion auf folgende Weise entzerrt: Möge in Fig. 3 der große Kreis ein Symbol für das fehlerfreie Bild des Bogens in der Spaltebene bei end on-Beobachtung sein und möge  $i(r) df$  die entsprechende *wahre* Intensität im Punkte  $O$  sein. Dann wird durch die Streuvorgänge ein Teil dieser Intensität zum Punkt  $P$  des Spaltes hingetragen. Die Größe dieses Bruchteils hängt von der Entfernung  $O-P=r'$  ab. Dieser Bruchteil als Funktion vor  $r'$  ist die

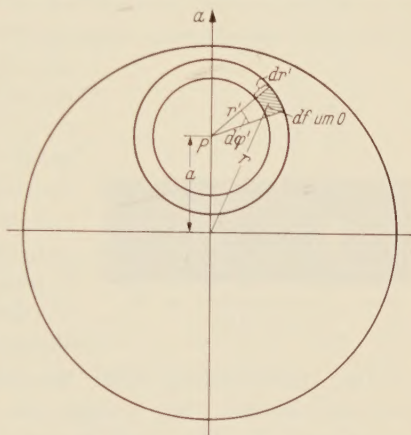


Fig. 3. Zur Entzerrung gemessener Intensitätsverteilungen. Der Spalt ist in der  $a$ -Achse zu denken.

Apparatefunktion  $A(r')$ . Von  $O$  nach  $P$  gelangt also die Intensität  $i(r)A(r')df$ . Summiert man die Beiträge aller Flächenelemente

$$df = r' dr' d\varphi' \quad (17)$$

zur Intensität in  $P$ , dann resultiert die gemessene Intensität auf dem Spalt

$$i_g(a) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} A(r') i(r) r' dr' d\varphi'. \quad (18)$$

Da  $A(r')$  durch Messung und Rechnung bekannt ist, läßt sich prinzipiell aus der gemessenen Intensitätsverteilung  $i_g(a)$  die wahre Intensitätsverteilung  $i(r)$  ausrechnen. Die praktische Lösung dieser Integralgleichung geschieht durch Probieren, und zwar so, daß man für  $i(r)$  verschiedene, etwas steiler als  $i_g(a)$  verlaufende Funktionen versuchsweise in das Integral von (18) einsetzt. Kommt dann aus der graphischen Integration die entlang des Spaltes  $a$  und damit entlang einer Spektrallinie gemessene Verteilung heraus, dann ist die eingesetzte Verteilung  $i(r)$  die ungestörte, also auf Streuvorgänge korrigierte Verteilung.

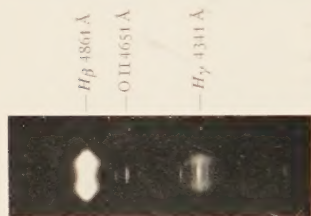


Fig. 4. End-on-Aufnahme mit der Anordnung Fig. 2.

Die Durchführung einer Messung soll an dem folgenden Beispiel erläutert werden. Fig. 4 zeigt die end on-Aufnahme vom 200 Amp-Bogen mit 2,3 mm Kanaldurchmesser und 2 cm Länge. Man sieht die verbreiterten und vor allem eingesenkten Linien  $H_\beta$  und  $H_\gamma$  und die in der Bogenmitte auftauchenden O II-Linien. Die Photometrierung von  $H_\beta$  entlang einer Kuppe und die Umrechnung mit der Schwärzungskurve ergibt die relative Intensitätsverteilung in Fig. 5. Das gleiche gilt für die Sauerstofflinie O II 4651 Å. An Hand der theoretischen Intensitätskurven als Funktion der Temperatur in Fig. 6 gemäß Gl. (16) läßt sich zunächst die Temperatur bei dem Bogenradius festlegen, bei dem das Maximum von  $H_\beta$  beobachtet wird. Von hier aus legt man durch Vergleich der relativen Intensitäten den vorläufigen Temperaturverlauf nach außen und innen fest. Bei der O II-Linie verfährt man ähnlich, indem man ihre Intensität auf die beim Maximum von  $H_\beta$  vorhandene bezieht. Die so gefundenen radialen Temperaturkurven  $a$  in Fig. 7 divergieren sehr stark und passen auch keineswegs mit der nach Fig. 1 zu erwartenden überein. Den Grund hierfür wird man zunächst darin suchen, daß die Intensitätsverteilung in den Linien durch die Apparatefunktion verwaschen ist. Man führt also das Entzerrungsverfahren nach Gl. (18) für jede Linie durch und wiederholt die Temperaturbestimmung (Kurven  $b$  in Fig. 7). Wenn auch dadurch der Temperaturverlauf ein wenig steiler geworden ist, so klafft immer noch eine große Lücke



zwischen der aus  $H_\beta$  und der aus der O II-Linie gewonnenen  $T$ -Kurve, und beide liegen immer noch viel flacher, als es die aus den Intensitätsmaximis gewonnene  $T$ -Verteilung in Fig. 1 verlangt. Da also trotz der vorgenommenen Korrekturen auf Streueffekte diese Diskrepanz bestehen bleibt, können Verwaschungen durch Streueffekte nicht allein dafür verantwortlich gemacht werden. Dieses Ergebnis der experimentellen Überprüfung zeigt, daß alle früheren und jetzigen Intensitätsmessungen in Ordnung sind, zumal die Lage des  $H_\beta$ -Maximums reproduziert werden konnte.

Ohne uns nun zunächst davon Rechenschaft zu geben, wodurch sonst die Verwaschungen hervorgerufen sind, können wir ihre Wirkung dadurch eliminieren, daß wir bei der Entzerrung neben der durch Streuung bedingten Apparatefunktion  $A(r')$  eine weitere

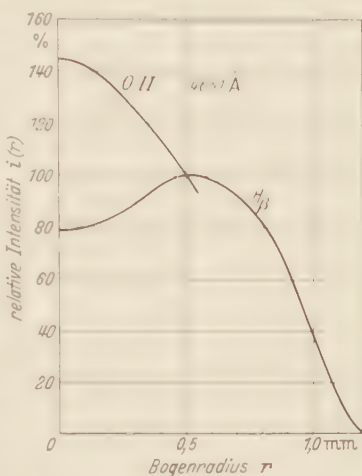


Fig. 5. Gemessene Intensitätsverteilungen für  $H_\beta$  und O II 4651 Å mit der Anordnung Fig. 2.

zusätzlich einführen mit der Forderung, daß die damit entzerrten Intensitätsverteilungen von  $H_\beta$

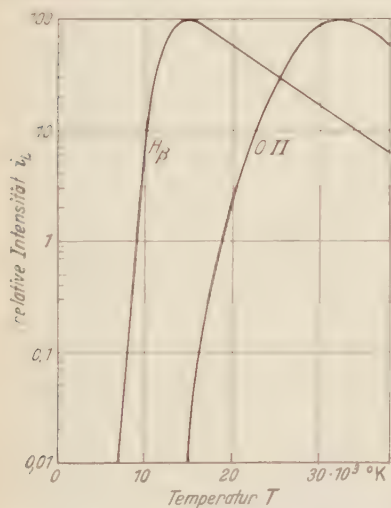


Fig. 6. Nach Gl. (16) berechnete, relative Intensität als Funktion der Temperatur für  $H_\beta$  und O II 4651 Å.

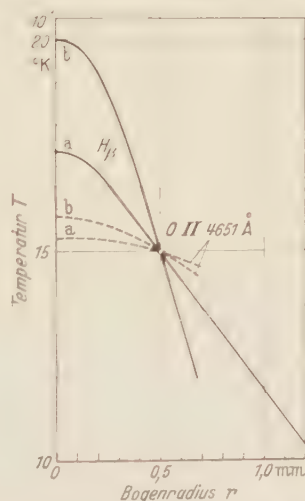


Fig. 7. Unkorrigierte (a) und nur mit Apparatefunktion korrigierte (b) Temperaturverteilungen aus den Kurven Fig. 5 und 6.

und O II 4651 Å ein und dieselbe Temperaturverteilung ergeben. Als zusätzliche Apparatefunktion wählen wir eine Rechteckfunktion, deren

Breite in der vorgezeichneten Weise zu bestimmen ist. Die Intensität des Beispiel-Lichtspektrallinies wird mit einem Photometer gemessen; man bestimme aus der wahren Linienform und der verwaschenen Registrierkurve die Breite des Photometerspalt. Durch das oben beschriebene Probieren kommt man schließlich zu einer korrigierten Intensitätsverteilung, die in Fig. 8a und b stark ausgezogen ist. Die Richtigkeit dieser Kurve verifiziert man dadurch, daß man sie wieder zunächst mit der bekannten Apparatfunktion und dann nach-einander mit Rechteckfunktionen

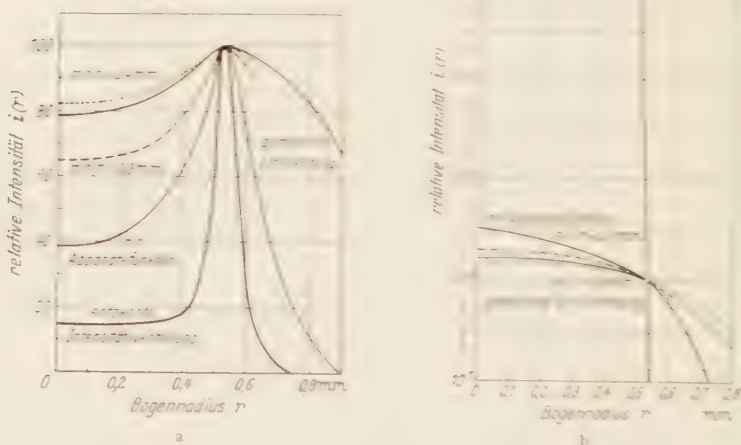


Fig. 8a u. b. Die richtige, entzerrte Intensitätsverteilung geht durch Verzerrung mit der Apparatfunktion  $A(r)$  und einer Rechteckfunktion der Breite 0,38 mm in die gemessene Verteilung über. a  $H\beta$ , b  $H\delta$  1 Å.

verschiedener Breite verzerrt, bis die gemessene Verteilung herauskommt, was für beide Linien bei einer Rechtecksbreite von 0,38 mm der Fall ist. Die hier angenommenen Ausgangskurven sind also auf wahre Intensitätsverteilungen richtig korrigiert, wenn sie noch hinter denselben Temperaturverlauf stehen, der dann als der richtige anzusehen ist. Auch diese Forderung wird von den beiden Ausgangsfunktionen erfüllt. Der so gefundene wahre Verlauf ist in Fig. 8 als ausgezogene Kurve bei 200 Amp mit eingezeichnet. Obwohl uns diese Kurve etwas zu steil ausgefallen zu sein scheint, fügt sie sich doch einigermaßen in die früher gemessenen Kurven ein.

Die Ursache für die Verwaschung sehen wir in einer gewissen Unruhe des Plasmas im Kanal, die sich entweder in einem Pendeln um etwa 0,2 mm, in einer schiefen Schraubenwindung um die Achse oder in einer gewissen Turbulenz von gleicher Größenordnung äußert.



Die Auswertung der korrigierten Temperaturverteilung bezüglich des Ionenquerschnittes gemäß Gl. (12) führt zu einem  $Q_i/Q_i^{\text{th}}$ -Verhältnis von 0,56 gegenüber früher von 0,53 und schließt sich damit noch besser als vorher dem Mittelwert von 0,55 an. Die geringe Änderung des Zahlenwertes für den Ionenquerschnitt trotz des scheinbar viel größeren Unterschiedes der Temperaturverteilung mit und ohne Korrektur in Fig. 1 beweist die Unempfindlichkeit der ganzen Methode auf irgendwelche Fehler.

*c) Neue Bestimmung des Ionenquerschnittes  
in Verbindung mit der SPITZERschen Theorie.*

In der neueren Zeit sind nun weitere theoretische Arbeiten über die elektrische Leitfähigkeit von ionisierten Gasen erschienen, von denen besonders die von L. SPITZER und seinen Mitarbeitern [7] zu nennen ist. Hier ist auch die Wechselwirkung der Elektronen untereinander mitberücksichtigt, die zwar insgesamt keine Impulsänderung der Elektronen ergibt, aber dennoch wegen der Änderung der Geschwindigkeitsverteilung die elektrische Leitfähigkeit beeinflusst. Ferner wird in der Arbeit von SPITZER, genau wie in unserer früheren Arbeit [6], die effektive Ionenladungszahl  $Z$

$$Z = \frac{\sum n_Z Z^2}{n_e} = \frac{\sum n_Z Z^2}{\sum n_Z Z} \quad (19)$$

für ein Gasgemisch aus mehrfach geladenen Ionen und Elektronen eingeführt. Diese Erweiterung ist für unseren Hochleistungsbogen deswegen besonders wichtig, weil hier bis zu dreifach geladene Ionen vorkommen. Die elektrische Leitfähigkeit eines vollständig ionisierten Plasmas beschreibt SPITZER durch die Gleichung

$$\sigma = \frac{4 (k T)^{\frac{3}{2}}}{\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} m_e e^2 Z \ln(q' C^2)} - \gamma_E, \quad (20)$$

worin schon

$$C^2 = \frac{3 k T}{m_e} \quad (21)$$

gesetzt ist.  $\gamma_E$  stellt den Korrekturfaktor gegenüber dem LORENTZ-Gas dar. Beim LORENTZ-Gas wird die Elektronenwechselwirkung untereinander nicht berücksichtigt und die Ionen werden als „in Ruhe befindlich“ betrachtet.)

Für  $Z = 1$  ist  $\gamma_E = 0,5816$ ,

für  $Z = 2$  ist  $\gamma_E = 0,6833$  und

für  $Z = \infty$  wird  $\gamma_E = 1$  (LORENTZ-Gas).

In der SPITZERschen Arbeit erfolgt die Ableitung der Leitfähigkeit auf so allgemeiner Grundlage, daß sowohl der Zahlenfaktor als auch die

Temperaturabhängigkeit als zuverlässig angesehen werden können. Dagegen besteht eine gewisse Willkür in der Festlegung des Gliedes  $\ln(q'C^2)$ . SPITZER verwendet für ein Plasma hoher Elektronendichte, das gerade bei dem von uns durchgemessenen Hochleistungsbogen vorliegt, den von CHAPMAN und COWLING<sup>18</sup> übernommenen Ausdruck  $\ln\left(\frac{4kT}{e^2}d\right)$ , worin  $d$  bei alleiniger Betrachtung von Zweierstößen zwischen Elektron und Ion die effektive Reichweite des COULOMB-Feldes bedeutet. CHAPMAN und COWLING setzen dafür den mittleren Abstand zweier benachbarter Ionen, nämlich

$$d = n_+^{-\frac{1}{3}}. \quad (22)$$

Dieser Wert ist sicher zu hoch gegriffen, weil spätestens in der Mitte zwischen zwei benachbarten Ionen das Feld des Nachbarions wirksam wird. Aber auch schon vor der Mitte wird sicher ein Einfluß des Nachbarfeldes vorhanden sein, so daß man für die effektive Reichweite des COULOMB-Feldes eher

$$d < \frac{1}{2} n_+^{-\frac{1}{3}} \quad (23)$$

erwarten sollte. Jedenfalls liegt die große Unsicherheit der Theorie in dem Zahlenfaktor des  $\ln$ -Gliedes. Deswegen ersetzen wir ihn durch einen Unsicherheitsfaktor  $\alpha$ , schreiben also  $\ln\left(\alpha \frac{4kT}{Ze^2 n_+^{\frac{1}{3}}}\right)$  und bestimmen ihn so, daß die nach Gl. (2) integrierte Leitfähigkeit (20) den gemessenen Leitwert pro cm ergibt. Da wir es im Hochleistungsbogen mit einem vollständig ionisierten Plasma zu tun haben, können wir direkt den von SPITZER angegebenen Ausdruck für die Leitfähigkeit mit dem Unsicherheitsfaktor  $\alpha$  verwenden, ohne schon jetzt auf die Wirkungsquerschnitte zurückgehen zu müssen. Um bei der Bestimmung des Faktors  $\alpha$  völlig sicher zu gehen, sind für die Integrationen nur diejenigen Temperaturverteilungen herangezogen worden, die sich auf mindestens zwei Temperaturfixpunkte aus entsprechenden Liniemaxima stützen, und außerdem die oben erwähnte sehr genau nachgeprüfte Verteilung bei 200 Amp. Das Ergebnis der Integrationen ist in der folgenden Tabelle 1 zusammengefaßt und ergibt den mit Rücksicht auf die Meßgenauigkeit abgerundeten Wert  $\alpha \approx 1$ .

Die Abweichungen der Einzelmessungen vom Mittelwert für  $\alpha$  erscheinen teilweise recht hoch, sind aber in erheblicher Weise bedingt, daß  $\alpha$  unter dem  $\ln$  steht. Der tatsächliche Einfluß auf die Leitfähigkeit kommt in der letzten Spalte von Tabelle 1, in der das Verhältnis der gemessenen Leitfähigkeit zu der nach Gl. (20) mit  $\alpha=1$  berechneten steht, und in der Fig. 9 zum Ausdruck, in der die Leitfähigkeit nach SPITZER mit  $\alpha=1$  als ausgezogene Kurve in Abhängigkeit von der Temperatur aufgetragen ist, während die einzelnen Kreise die gemessenen



Tabelle 1.

$J$ Amp	$E$ V/cm	$\alpha$	$\bar{T}$ °K	$\sigma\bar{T}/\sigma(\alpha=1)$
202	106	0,86	26 000	1,04
250	114	0,78	26 000	1,07
300	121	0,89	26 500	1,03
350	128	0,90	27 500	1,03
400	136	1,00	28 500	1,00
600	166	1,02	32 500	0,98
800	196	1,09	35 500	0,97
1000	226	1,38	40 000	0,92
1450	294	2,15	44 000	0,84
Mittel		1,1		

(Die über die Leitfähigkeit gemittelte Temperatur  $\bar{T}$  ergibt sich aus der

$$\text{Definitionsgleichung } \bar{T} = \frac{\int_0^R T(r) \sigma(T) r dr}{\int_0^R \sigma r dr} .)$$

$\sigma$ -Werte wiedergeben. Ferner ist gestrichelt die mit  $\alpha = 4$  (nach CHAPMAN-COWLING) berechnete Leitfähigkeit eingetragen, die etwa 30% unterhalb der Kurve mit  $\alpha = 1$  verläuft und somit außerhalb der Meßgenauigkeit liegt. Schließlich sind noch zwei Meßpunkte als Kreuze eingetragen, die sich aus der Auswertung der von LARENZ gemessenen Temperaturverteilungen ergeben haben. Leider haftet aber diesen Punkten eine ziemliche Unsicherheit an, weil die Feldstärke an dem gemessenen Ort (2 mm vor dem Kanal) nicht bekannt ist. Wir haben aus der angegebenen Temperaturverteilung einen effektiven Kanaldurchmesser von 5 mm extrapoliert und nach [4] eine Feldstärke 50 V/cm eingesetzt. Ob der systematische Gang der Abweichung mit der Stromstärke reell ist, kann im Rahmen dieser Untersuchung nicht festgestellt werden, da die Meßgenauigkeit von etwa  $\pm 15\%$  (Fehler in der Temperaturbestimmung sowie Stromstärke- und Feldstärkemessung) nicht dazu ausreicht.

Der Mittelwert  $\alpha = 1$  bedeutet, daß das COULOMB-Feld bei  $1/4$  des Gesamtabstandes zweier benachbarter Ionen abzuschneiden ist, wenn man mit den Messungen in Übereinstimmung kommen will.

In diesem Zusammenhang mag noch interessieren, daß G. BURKHARDT [20] aus Dispersionsbetrachtungen für das reine Plasma einen  $\alpha$ -Wert von  $\alpha = 1/1,44 = 0,7$  fordert, was einem Abschneiden bei etwa  $1/6$  Ionenabstand entsprechen würde.

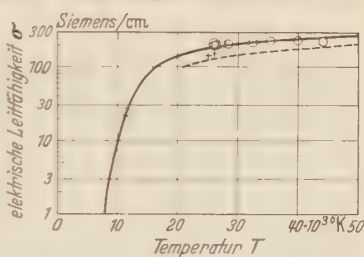


Fig. 9. Leitfähigkeit eines reinen Plasmas  $H_2$  (4) nach L. SPITZER [7] mit  $\alpha = 1$  (ausgezogen), mit  $\alpha = 4$  (gestrichelt), und nach eigenen Untersuchungen (Meßpunkte).

Bei kleineren Ionendichten ist noch der Einfluß der entfernteren Ionen mit zu berücksichtigen. Dann hat an Stelle des hier benutzten  $\ln$ -Gliedes ein anderes zu treten, das aus den DEBYESchen Vorstellungen entstanden ist, nämlich  $\ln(3 \cdot \pi^{1/2} n_e^2 e^3 / (k T)^2)$ . Da sich aber aus unseren Messungen ein Abschneideradius von 1,4-Ionenabstand ergeben hat, sind offenbar die nahen, wenn auch seltenen Stöße wirksamer als die häufiger stattfindenden fernen Vorbeigänge der Elektronen, wodurch nachträglich die von uns getroffene Wahl des  $\ln$ -Gliedes seine Berechtigung findet.

Wenn nun ein Plasma vorliegt, in dem außer den Ionen auch noch Neutralteilchen an der Bremsung der Elektronen beteiligt sind, dann muß man sich auch für die Ionen wieder der Hilfsvorstellung des Wirkungsquerschnittes bedienen, um aus beiden Querschnitten die Gesamtleitfähigkeit des Plasmas nach Gl. (16) berechnen zu können. Um also aus Gl. (20) einen effektiven Ionenquerschnitt zu ermitteln, identifizieren wir sie mit der Leitfähigkeitsgleichung (16) für ein vollständig ionisiertes Gas ( $n_0 Q_0 \approx 0$ ) und erhalten für  $Z$ -fach geladene Ionen

$$Q_+ = \frac{0,567}{\gamma_E} \frac{Z^2 e^4}{(k T)^2} \ln \left( \frac{k T}{Z e^2 n_+^{1/2}} \right). \quad (24)$$

Für  $Z = 1$  mit  $\gamma_E = 0,5816$  folgt daraus innerhalb der Meßgenauigkeit von  $\pm 15\%$  der einfache Ausdruck

$$Q_+ = \frac{e^4}{(k T)^2} \ln \left( \frac{k T}{e^2 n_+^{1/2}} \right). \quad (25)$$

der etwa halb so groß ist, wie der von GYSEDÖVER berechnete Wert in Übereinstimmung mit Gl. (15). Uns scheint Gl. (25) die geeignetste Formel für Gasentladungsrechnungen zu sein.

#### IV. RAMSAUER-Querschnitte für Wasserstoffatome.

##### a) Messungen am normalen wasserstabilisierten Bogen.

Nachdem nunmehr die Wirkungsquerschnitte der Ionen gegenüber Elektronenstoß bekannt sind, kann man aus der Leitfähigkeit eines Wasserdampfplasmas, in dem sich Ionen und Atome in vergleichbarem Maße an der Bremsung beteiligen, die RAMSAUER-Querschnitte der Atome ermitteln. Hierzu eignet sich der von H. MAECKER [9] vorgeschlagene normale wasserstabilisierte Bogen, der in einem verhältnismäßig weiten Rohr mit nicht sehr hohen Stromstärken brennt. Einen solchen Bogen mit 8 mm Rohrdurchmesser, 5 cm Länge, 50 Amp und 35 V cm hat G. JÜRGENS [10] sorgfältig durchgemessen und in der Achse eine Temperatur von 12650° K und eine Elektronenkonzentration von  $8,4 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  gefunden.



An diesem Bogen haben wir nun die radiale Temperaturverteilung aus dem Intensitätsabfall der Linien  $H_\alpha$  und  $H_\beta$  und des Kontinuums zwischen diesen beiden Linien in Verbindung mit dem theoretischen Intensitätsabfall Gl. (16) gemessen. Dabei wurde sowohl die side on-Beobachtung mit anschließender Umrechnung der gemessenen Querverteilung auf radiale Intensitätsverteilung mit Hilfe der ABELSchen Integralgleichung als auch die end on-Beobachtung herangezogen. In beiden Fällen wurde besondere Sorgfalt auf die Ausschaltung von Fehlern durch Verwaschungseffekte, also unebene Wasser- oder Quarzoberfläche, Tiefenschärfe und Beugung verwendet. Wenn diese Einflüsse auch durchwegs gering waren, so wurden sie doch korrigiert. Die Verwendung eines Spektralapparates erübrigte sich, weil die fraglichen Linien und erst recht das Stück Kontinuum durch geeignete Filter ausgeblendet werden konnten. Das Ergebnis einer großen Zahl solcher Messungen ist in Fig. 10 dargestellt. Mit dieser Temperaturverteilung können wir nun alle temperaturabhängigen Größen in der Leitfähigkeitsgleichung (12), nämlich  $n_e$ ,  $n_0$  und  $n_- Q_-$  berechnen und  $Q_0$  so bestimmen, daß aus der Integration der gemessene Leitwert pro cm  $J/E$  herauskommt. Für  $Q_0$  ergibt sich der überraschend hohe Wert von

$$Q_0 = 92 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2. \quad (26)$$

Dieser ist so viel größer als der nach der ersten BORNschen Näherung [11] berechnete Wert von  $4\pi a^2 = 3,5 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$ , daß diese Diskrepanz der Hauptgrund für die sorgfältige Überprüfung aller Messungen war. Inzwischen haben allerdings quantenmechanische Rechnungen von L. MOWER [12] und von H. S. W. MASSEY und B. L. MOISEWITSCH [13] den Wirkungsquerschnitt von H-Atomen für den in Frage kommenden Temperaturbereich auf  $25 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$  heraufgesetzt, wodurch der Unterschied um nahezu eine Zehnerpotenz verringert worden ist.

### b) Messungen am wasserstabilisierten Hochdruckbogen.

Noch genauer als im vorgenannten Bogen können die Wirkungsquerschnitte der Neutralteilchen im Wasserdampfplasma des wasserstabilisierten Hochdruckbogens ermittelt werden, der von TH. PETERS [14] eingehend untersucht worden ist. Bei diesem Bogen entsteht der Stabilisierungskanal durch Rotation eines teilweise mit Wasser gefüllten Druckgefäßes. Der Lichtbogen erzeugt dann durch Wasserverdampfung

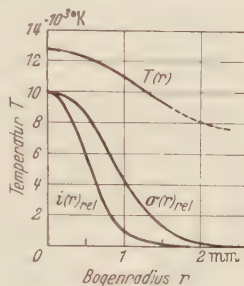


Fig. 10. Radiale Temperaturverteilung für den normalen wasserstabilisierten Bogen mit 8 mm Rohrdurchmesser bei 50 Amp. Gemessener radialer Intensitätsabfall und der wesentlich breitere Leitfähigkeitsabfall, beides relativ.

selbsttätig den Druck, der bei einem maximalen Leistungsumsatz von 100 kW/cm (200 Amp, 500 V/cm) auf 1000 at ansteigen kann.

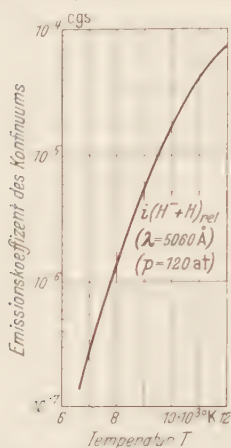


Fig. 11. Die größtenteils vom  $H^-$ -Ion erzeugte Kontinuumsintensität im Plasma des wasserstabilisierten H-Bogens, als Funktion der Temperatur (berechnet).

Kontinuum zwischen  $H_\alpha$  und  $H_\beta$  nach Auschnitt an die Achsentemperatur ermittelt. Da das Kontinuum zum größten Teil vom  $H^-$ -Ion ausgestrahlt wird, muß die Berechnung der Kontinuumsintensität als

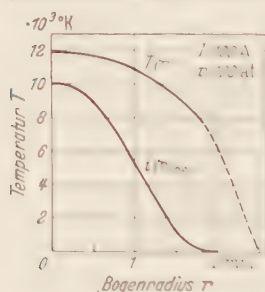


Fig. 12. Relativer radialer Verlauf des Kontinuums und absolute Temperatur im Hochdruckbogen.

Die aus der Linienform von  $H_\beta$  direkt gemessene Elektronendichte führte in dem durchgemessenen Druckbereich von 50 bis 300 at zu einem Ionisationsgrad von 1 bis 2%. Die aus der Elektronendichte über die SAHA-Gleichung berechneten Achsentemperaturen ergeben einen geringfügigen Abfall der Temperatur mit steigendem Druck bei konstanter Stromstärke und liegen bei etwa 12000° K. Unter diesen Umständen kann der Wirkungsquerschnitt der Ionen in Gl. (10) vollständig vernachlässigt werden. Die Leitfähigkeit wird allein durch die neutralen Atome bestimmt. Deswegen ist der an diesem Bogen gemessene RAMSAUER-Querschnitt der Neutralteilchen frei von Fehlern in den Ionenquerschnitten und daher zuverlässig. Der relative radiale Temperaturverlauf wird durch Messung der radialen Strahlungsdichteverteilung im Kontinuum zwischen  $H_\alpha$  und  $H_\beta$  nach Auschnitt an die Achsentemperatur ermittelt. Da das Kontinuum zum größten Teil vom  $H^-$ -Ion ausgestrahlt wird, muß die Berechnung der Kontinuumsintensität als Funktion der Temperatur in erster Linie auf diesem Prozeß aufgebaut werden (Fig. 11). Mit dieser Kurve erhält man aus der gemessenen radialen Intensitätsverteilung den Temperaturverlauf, wie er für einen Fall in Fig. 12 dargestellt ist. Die Integration gemäß Gl. (12) ergibt dann direkt die Wirkungsquerschnitte der neutralen Atome. Die Ergebnisse dieser Auswertungen sind in Tabelle 2 wiedergegeben.

Der Mittelwert von  $Q_0 = 94 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$  stimmt überraschend gut mit dem Wert  $Q_0 = 92 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$  des vorigen Abschnittes überein, so daß als Mittel für beide Bogenarten resultiert:

$$Q_0^{(2)H,0} = 93 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \pm 15\%. \quad (27)$$

Wegen dieser guten Übereinstimmung ist es berechtigt, auch aus den Messungen am normalen wasserstabilisierten Bogen einen  $\alpha$ -Wert für die Ionen zu entnehmen; er ist in Fig. 9 mit eingetragen.



Tabelle 2.

$p$ Atm	$J$ Amp	$E$ V/cm	$n_e$ $10^{-17} \text{ cm}^{-3}$	$^{\circ}\text{K}$	$Q_0$ $10^{16} \text{ cm}^2$
50	100	300	6,0	12050	106
80	100	380	7,2	11850	99
100	100	420	8,8	12000	110
120	100	460	7,2	11500	80
150	100	500	8,8	11600	88
300	150	450	20,0	12500	79
Mittel					94

Nun ist noch zu bedenken, daß im Wasserdampfplasma ein Gemisch von Wasserstoff- und Sauerstoffatomen im Verhältnis 2:1 vorliegt. Aus Messungen am Hochstrombogen in Luft, über die im nächsten Kapitel berichtet wird, folgt, daß der Wirkungsquerschnitt von neutralen Sauerstoffatomen gegenüber Elektronenstoß mit etwa  $Q^0 = 20 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$  anzusetzen ist. Teilen wir also den Gesamtquerschnitt auf, entsprechend

$$n_0 Q_0 = n^H Q^H + n^0 Q^0, \quad (28)$$

so ergibt sich mit

$$n_0 = n^H + n^0$$

und

$$n^H = 2n^0$$

ein Wasserstoffquerschnitt von

$$Q^H = \frac{2}{3} Q_0 - \frac{1}{2} Q^0 = 130 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \pm 25 \%. \quad (29)$$

Wenn auch dieses Ergebnis noch wesentlich höher liegt als die bisher berechneten Werte, so sind die übereinstimmenden Aussagen der obigen Untersuchungen doch zu eindeutig, als daß an ihrer Richtigkeit gezweifelt werden könnte.

## V. RAMSAUER-Querschnitte für C-, N- und O-Atome aus Messungen an der Säule des Hochstromkohlebogens.

Kürzlich hat H. MAECKER [15] die Elektronendichte in der Säule des Hochstromkohlebogens von 200 Amp aus der STARK-Effektverbreiterung von  $H_\beta$  und der Absolutintensität des Kontinuums als Funktion des Bogenradius gemessen und die absolute radiale Temperaturverteilung nach verschiedenen Methoden bestimmt (Achsenwerte:  $n_e = 7 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ,  $T = 11000^\circ \text{ K}$ ). Außerdem ist für diesen Bogen von W. FINKELNBURG und S. M. SEGAL [16] die Säulenfeldstärke zu 10 V/cm angegeben worden. Diese Meßergebnisse gestatten es, die Leitfähigkeitsgleichung (12) durch integrierte Integration nach  $Q_0$  aufzulösen, so daß man einen mittleren Wirkungsquerschnitt für die im Bogenplasma enthaltenen Atome C, N

und O erhält. Diese Auswertung führt zu dem Resultat:

$$Q_0^{C,N,O} = 20 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \pm 15\%. \quad (30)$$

Da diese drei Atomarten nebeneinander im Periodischen System liegen, kann man versuchsweise den gefundenen Querschnitt jeder Atomart einzeln zuordnen, wovon im vorigen und im nächsten Kapitel Gebrauch gemacht worden ist.

## VI. RAMSAUER-Querschnitte für Fe-Atome aus Messungen am Pfundbogen.

F. BURHORN [17] hat im Eisen-Pfundbogen, der zwischen FeO-Elektroden mit einer Stromstärke von 5 Amp bei einer Länge von 1,5 bis 2 mm brennt, Feldstärke, Elektronendichte und radiale Temperaturverteilung gemessen. Die Feldstärke hat er aus der Änderung der Bogen-spannung mit der Längenänderung zu 4 V/cm bestimmt. Die Elektronendichte ergab sich aus der absoluten Intensität des Kontinuums in der Achse — nach Umrechnung der beobachteten Querverteilung auf die radiale Intensitätsverteilung mit Hilfe der ABEL'schen Integralgleichung — gemäß der Beziehung [18]

$$i_{\text{Kont}} = 6,36 \cdot 10^{-47} n_e^2 \int k T \quad (31)$$

zu  $3,5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  bei einem maximalen Ionisationsgrad von 3%. Aus diesem Wert in Verbindung mit der SAHA-Gleichung und aus DOPPLER-Breitenmessungen ergab sich eine Achsentemperatur von 6100° K. Die radiale Verteilung der Temperatur wurde aus dem relativen Intensitätsabfall geeigneter Spektrallinien gemäß Gl. (16) ermittelt. Damit sind uns alle Unterlagen gegeben, um auch am Fe-Bogen RAMSAUER-Querschnitte nach Gl. (12) zu ermitteln. Für die neutralen Atome im Pfundbogen findet man so den Wert

$$Q_0^{\text{Fe},O} = 27 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2. \quad (32)$$

Zerlegt man diesen Querschnitt nach dem Vorbild von Gl. (28) in die Anteile des Fe und des O, die beide in gleicher Zahl im Bogenplasma vorhanden sind, und setzt wieder für  $Q_0$  etwa  $20 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$  ein, dann ist

$$Q^{\text{Fe}} = 35 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \pm 30\%. \quad (33)$$

## VII. Graphische Darstellung der RAMSAUER-Querschnitte.

Zum Schluß dieser Abhandlung haben wir einmal die Bereiche, in denen die bisher bekannten RAMSAUER-Querschnitte von Atomen für den fraglichen Geschwindigkeitsbereich [19] liegen, gegen die Valenzelektronenzahl aufgetragen (Fig. 13). Wie man sieht, haben die

Elemente gleicher Valenzelektronenzahl auch dieselbe Größenordnung des RAMSAUER-Querschnitts, wobei nur H und He etwas herausfallen. Die Übergangselemente (z. B. Fe) lassen sich natürlich nicht in dieses Schema einordnen. Vielleicht könnte man in dieser groben Darstellung sogar einen gewissen Gang mit der Valenzelektronenzahl vermuten. In diesem Zusammenhang wären Messungen des RAMSAUER-Querschnitts an den Halogenen mit der Valenzelektronenzahl 7 von großem Interesse.

### Zusammenfassung.

Wie in jedem inhomogenen Leiter muß auch bei einer Bogenentladung der aus dem Verhältnis Stromstärke zu Feldstärke berechnete Leitwert pro cm übereinstimmen mit der über den Querschnitt integrierten Leitfähigkeit. Da auf Grund kinetischer Vorstellungen die Leitfähigkeit über die Wirkungsquerschnitte der bremsenden Ionen und Atome mit der Elektronendichte und der Temperatur verbunden ist, kann man aus der gemessenen Elektronendichte- und Temperaturverteilung die Ionen und Atomquerschnitte ermitteln.

Messungen am wasserstabilisierten Hochleistungsbogen (GERDIEN-Bogen), die wegen gewisser früherer Unstimmigkeiten überprüft wurden, führten zu folgender Gleichung für den Ionenquerschnitt:

$$Q_{+} = \frac{e^4}{(kT)^2} \ln \left( \frac{kT}{e^2 n_e^{1/2}} \right) \pm 15\%.$$

Dieser Querschnitt stimmt zahlenmäßig weitgehend mit theoretischen Berechnungen von L. SPITZER überein.

Untersuchungen am normalen wasserstabilisierten Bogen und am wasserstabilisierten Hochdruckbogen ergaben für den RAMSAUER-Querschnitt der H-Atome

$$Q^H = 130 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \pm 25\%.$$

Ähnliche Auswertungen am Hochstromkohlebogen brachten für die Elemente C, N, und O den Mittelwert

$$Q^{C,N,O} = 20 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \pm 15\%.$$



Fig. 43. Bisher bekannte RAMSAUER-Querschnitte über der Valenzelektronenzahl aufgetragen.



Die entsprechenden Messungen und Berechnungen für den Fe-Pfund-Bogen hatten den Wert

$$Q^{\text{Fe}} = 35 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \pm 30\%$$

zum Ergebnis.

Die Messungen am GERDIEN-Bogen, an normalen wasserstabilisierten Bogen und am wasserstabilisierten Hochdruckbogen wurden in Kiel durchgeführt, während die Untersuchungen am Hochstromkohlebogen und am Eisenbogen in Erlangen angestellt wurden.

### Literatur.

- [1] GERDIEN, H., u. A. LOTZ: Wiss. Veröff.-Siemens-Werk **2**, 489 (1922). — [2] LARENZ, R. W.: Z. Physik **129**, 327; 343 (1951). — [3] BURHORN, F., H. MAECKER u. TH. PETERS: Z. Physik **131**, 28 (1951). — [4] BURHORN, F., u. H. MAECKER: Z. Physik **129**, 369 (1951). — [5] GVOSDOVER, S. D.: Phys. Z. Sovjet. **12**, 164 (1937). — [6] MAECKER, H., u. TH. PETERS: Z. phys. Chem. **198**, 318 (1951). — [7] COHEN, R. S., L. SPITZER and McR. RUTLY: Phys. Rev. **80**, 230 (1950). — SPITZER, L., and R. HÄRM: Phys. Rev. **89**, 977 (1953). — [8] CHAPMAN, S., and T. G. COWLING: The Math. Theory of Nonuniform Gases. Cambridge: University Press 1952. — [9] MAECKER, H.: Z. Physik **129**, 108 (1951). — [10] JÜRGENS, G.: Z. Physik **134**, 21 (1952). — [11] BORN, M.: Z. Physik **38**, 803 (1926). — [12] MOVER, L.: Phys. Rev. **89**, 947 (1953). — [13] MASSEY, H. S. W., and B. L. MOISEWITSCH: Proc. Roy. Soc., Ser. A **205**, 483 (1951). — [14] PETERS, TH.: Z. Physik **135**, 573 (1953). — [15] MAECKER, H.: Z. Physik **136**, 119 (1953). — [16] FINKELNBURG, W., and S. M. SEGAL: Phys. Rev. **80**, 258 (1950). — [17] BURHORN, F.: Z. Physik (im Druck). — [18] MAECKER, H., u. TH. PETERS: Z. Physik **139**, 448 (1954). — [19] LANDOLT-BÖRNSTEIN Bd. I, 1. Teil, S. 327. Berlin: Springer 1950. — [20] BURKHARDT, G.: Ann. Physik (6) **5**, 373 (1950). — BURKHARDT, G., u. S. SCHLÜTER: Z. Astrophys. **27**, 295 (1949). — BURKHARDT, G., G. ELWERT u. A. UNSÖLD: Z. Astrophys. **25**, 310 (1948).

Erlangen, Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke AG.

Kiel, Institut für Experimentalphysik der Universität.

## Lumineszenzuntersuchungen an Uran-aktivierten Erdalkaliwolframaten und -molybdaten.

Von

H. GOBRECHT und WERNER WEISS.

Mit 4 Figuren im Text.

(Eingegangen am 20. Oktober 1954.)

Das verschiedenartige Auftreten und Verhalten der Lumineszenz Uran-aktivierter Erdalkaliwolframate und -molybdate wird untersucht. Man beobachtet zwei voneinander getrennte Lumineszenzbanden im grünen und im roten Spektralbereich, die durch chemische Zusätze zu den Wolframaten und Molybdaten vor dem Glühen einzeln in ihrer Strahlungsstärke, die grüne Bande auch in ihrer spektralen Lage, verändert werden können.

### *Einleitung.*

Über die an und für sich bekannte Lumineszenz von Uran-aktiviertem Calcium- und Strontiumwolframat durch Anregung mit langwelligem ultravioletten Licht sind in der Literatur bezüglich der Lumineszenzfarbe keine einheitlichen Angaben zu finden. So soll z. B.  $\text{CaWO}_4$ -U nach KRÖGER [1] bei  $-180^\circ\text{C}$  rot und grün, nach GARLICK [2] nur grün lumineszieren. Der Grund dieses Verhaltens ist bereits von KRÖGER [1] in der verschiedenen Zusammensetzung der Ausgangssubstanz vermutet worden.

In der vorliegenden Arbeit wird diese Annahme bestätigt. Es zeigen sich systematische Abhängigkeiten der spektralen Verteilung der Lumineszenz, ebenso der Strahlungsstärke der roten und grünen Bande von der Zusammensetzung der Grundsubstanzen. Ferner hängen die relativen Strahlungsstärken der beiden Banden in so verschiedener und charakteristischer Weise von den Glühbedingungen, von der Aktivatorkonzentration und von der Beobachtungstemperatur ab, daß mit hoher Wahrscheinlichkeit ein gemeinsamer Ursprung der roten und der grünen Bande ausgeschlossen werden kann. Die Versuche wurden nicht nur mit  $\text{Ca}$ - und  $\text{SrWO}_4$ -U angestellt, sondern auch auf  $\text{BaWO}_4$ -U und die entsprechenden Uran-aktivierten Erdalkalimolybdate ausgedehnt, deren Lumineszenzverhalten unseres Wissens noch nicht beschrieben worden ist.

### *Apparatur zur Messung der Strahlungsstärke.*

Das Licht einer Quecksilberhochdrucklampe passiert einen Kondensor und drei geeignete Filter zur Aussonderung der Linie  $3650\text{ Å}$  und dient dann zur Anregung. Die lumineszierende Leuchtstofffläche wird

in einer Irisblende abgebildet, die während aller Messungen die gleiche Öffnung beibehält und einen Teil der Leuchtstofffläche ausblendet. Das durch sie hindurchgehende Licht gelangt auf die Kathode einer Photozelle mit Sekundärelektronenvervielfachung (Multiplier). Das angeschlossene Galvanometer liegt in einer Kompensationsschaltung zum Ausgleich des unvermeidlichen Dunkelstromes des Multipliers. Zur Trennung des Lumineszenzlichtes dienen zwei Filterkombinationen. Für das grüne Leuchten die SCHOTT-Filter VG 6, VG 8, BG 19; für das rote Leuchten RG 5 und BG 19, je 1 mm stark.

Die Messungen erfolgten auch bei tiefer Temperatur. Dazu wurde die Probe vorher in flüssige Luft getaucht. Zur Messung der Abhängigkeit der Strahlungsstärke von der Temperatur wurde ein kleines Thermoelement in den Boden des Leuchtstoffbehälters eingeschmolzen und geeicht. Sollte die Probe bei höherer Temperatur untersucht werden, dann wurde sie erhitzt und die Messung während der natürlichen Abkühlung durchgeführt. Die Messungen wurden je 5mal wiederholt. Der mittlere Fehler der Photostromablesung ergab sich zu 20 bis 30%. Wegen der Selektivität des Empfängers kann in den Diagrammen die gemessene Strahlungsstärke der roten Bande nicht mit der der grünen Bande verglichen werden. Als Anhalt kann jedoch dienen, daß sich die Empfindlichkeit der Anordnung für grün:rot etwa wie 10:1 verhält, wie eine Empfindlichkeitsmessung ergab. Die Strahlungsstärke ist dem Photostrom etwa proportional, trotz geringer spektraler Verschiebungen innerhalb der einzelnen Banden bei den verschiedenen Stoffen.

### *Die Leuchtstoffpräparationen.*

Die Wolframate wurden sowohl durch Fällung als auch aus Oxyden hergestellt. Die Ausgangssubstanzen bei den Fällungsreaktionen waren einerseits  $\text{Na}_2\text{WO}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$  p.a., andererseits  $\text{Sr}(\text{CH}_3\text{COO})_2 + \frac{1}{2}\text{H}_2\text{O}$  p.a.,  $\text{Ba}(\text{NO}_3)_2$  p.a. und  $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$  reinst. Molybdate wurden nicht gefällt. Das aus heißen Lösungen gefällte Produkt wurde 5mal mit heißem bidestillierten Wasser ausgewaschen, abfiltriert, getrocknet, in einem Ofen 1 Std lang bei  $1150^\circ\text{C}$  im unglasierten Porzellantiegel geglüht und dann in einer Reibschale fein zerstoßen. In dieser Form bildete es die Grundsubstanz für alle weiteren Präparationen. Es ist nämlich unzumutbar, das gefällte, getrocknete Salz bereits für die Aktivierung und Sensibilisierung zu verwenden, da es undefinierte Wassermengen enthält, die mitgewogen werden und die Konzentrationsangaben verfälschen. Da keine Kenntnisse darüber bestehen, ob gefällte Wolframate eindeutige Zusammensetzung haben [3], wurde bei einigen Proben die Reihenfolge bei der Fällung gewechselt, d.h. es wurde sowohl z.B.  $\text{Na}_2\text{WO}_4$ -Lösung zu  $\text{Ba}(\text{NO}_3)_2$ -Lösung gegeben als auch umgekehrt. Beide Produkte wurden dann gleichartig weiterbehandelt und mit gleichen Mengen Uran



aktiviert. Da die Lumineszenz von Uran-aktivierten Wolframaten nach unseren Versuchen stark von der Zusammensetzung der Grundsubstanzen abhängt, hätten sich hierbei Unterschiede bemerkbar machen können. Dies war aber nicht der Fall.

Bei der Fällung bildet sich wegen der doppelten Umsetzung ein anderes, lösliches Salz, das der Niederschlag trotz mehrmaligen Waschens fest adsorbiert. Die Anwesenheit dieses Zusatzes bemerkt man auch aus der Sinterung beim Glühen, die beiden aus Oxyden gewonnenen Verbindungen bei 1150° C kaum auftritt. Das verbleibende Salz nimmt einen entscheidenden Einfluß auf die Lumineszenz des mit Uran-aktivierten Erdalkaliwolframats.

Um auch zusatzfreie Grundsubstanzen zur Verfügung zu haben, wurden diese auch aus Oxyden bzw. Carbonaten hergestellt. Die Ausgangssubstanzen waren  $\text{H}_2\text{WO}_4$  p.a. bzw.  $\text{MoO}_3$  reinst und  $\text{CaCO}_3$ ,  $\text{SrCO}_3$ ,  $\text{BaCO}_3$ . Die Erdalkalicarbonate lagen in besonders reiner Form vor<sup>1</sup>. Dies erwies sich später als vorteilhaft, weil die Lumineszenzfarbe in den untersuchten Leuchtstoffen besonders stark von Zusätzen abhängig ist. Die Oxyde wurden im richtigen Mengenverhältnis in glasierten Porzellanschalen mit bidestilliertem Wasser gut vermischt, zu einem Brei angerührt, im Trockenschrank getrocknet und dann in unglasierten Porzellantiegeln bei 1150° C 1 Std lang geblüht. Die Glühung wurde 2 bis 3mal unterbrochen und der Tiegelinhalt in einer Reibschale kraftig durchmischt. Bei den meisten Versuchen mit  $\text{CaWO}_4$  ist statt eines selbstergestellten Produktes zu Vergleichszwecken  $\text{CaWO}_4$  von MERCK als Grundsubstanz verwendet worden.

Die Glühungen erfolgten bei allen Versuchen grundsätzlich in unglasierten, offenen Porzellantiegeln. Der benutzte Ofen war ein „Silit“-Stab-Muffel-Ofen. Seine zulässige Maximaltemperatur betrug 1400° C. Die Temperaturmessung erfolgte mit einem Pt/Pt-Rh-Thermoelement.

Das Uranpräparat war in einer Tropfenflasche als Uranylacetatlösung vorhanden. Es eignen sich dazu aber auch alle anderen Uransalze, die in der Hitze zu  $\text{UO}_3$  zerfallen. Die Lösung wurde so angesetzt, daß in einem Tropfen  $2,5 \cdot 10^{-4}$  g Uran vorhanden waren. Grundsubstanz (gefällt oder aus Oxyden hergestellt) und Zusätze wurden nach Wägung mit der Uranlösung und bidestilliertem Wasser vermischt und wie oben angegeben behandelt. Die Wägegenauigkeit betrug etwa 1%.

### *Der Verlauf der Strahlungsstärke beider Banden bei Änderung der chemischen Zusammensetzung.*

Zwei verschiedene Gruppen von Versuchsreihen wurden durchgeführt: Einmal wurden zu den aus Oxyden hergestellten Grundsubstanzen verschiedene Salze verschiedener Konzentration gegeben und die

<sup>1</sup> Sie wurden uns freundlicherweise von der Auer-Gesellschaft zur Verfügung gestellt.

Strahlungsstärke des Rot- und Grünleuchtens bei konstanter Anregung gemessen. Die Grundsubstanzen waren folgendermaßen erhalten worden:

$\text{CaWO}_4$  aus  $\text{CaWO}_4$  (Merck),

$\text{SrWO}_4$  aus 1 mol  $\text{SrCO}_3$  + 1 mol  $\text{H}_2\text{WO}_4$ ,

$\text{BaWO}_4$  aus 1,02 mol  $\text{BaCO}_3$  + 1 mol  $\text{H}_2\text{WO}_4$ .

Die Urankonzentration betrug stets 0,5 mol-%, die Glühdauer 15 min bei 1150° C. Die Zusammensetzung der Leuchtstoffe bezieht sich stets

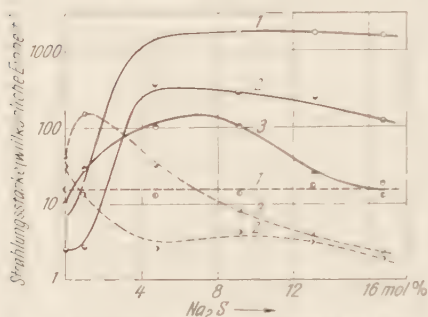


Fig. 1. Abhängigkeit der Strahlungsstärke der Lumineszenz bei -180°C von dem Gehalt an  $\text{Na}_2\text{S}$  (vor dem Glühen) in: 1  $\text{CaWO}_4$ -U; 2  $\text{SrWO}_4$ -U; 3  $\text{BaWO}_4$ -U. Rote Lumineszenz (sensibilisierende Lumineszenz) gestrichelt.

auf das Produkt vor dem Glühen.

Von den vielen Versuchsreihen sei ein Ergebnis als Beispiel herausgegriffen. Es ist in Fig. 1 dargestellt. Man sieht deutlich ein Überwiegen der roten Lumineszenz bei Zugabe von  $\text{Na}_2\text{S}$ . Gibt man nun statt dieses Salzes z. B.  $\text{Na}_4\text{P}_2\text{O}_7$  hinzu, dann erhält man ein Überwiegen des grünen Leuchtens. Die Tabelle 1 zeigt übersichtlich, welchen Einfluß eine Reihe von Salzen auf die Lumineszenzfarbe der Uran-aktivierten Erdalkaliwolframate haben.

Die andere Gruppe von Versuchsreihen war folgender Art: Es wurden Erdalkalicarbonate der Grundsubstanz in wachsender Menge zugesetzt. In Fig. 2 sind die Meßreihen für  $\text{SrWO}_4$ ,  $\text{SrCO}_3$  und  $\text{CaWO}_4$ ,  $\text{CaCO}_3$  dargestellt. Bei der Wahl des zusätzlichen Erdalkalicarbonats ist es gleichgültig, ob die gleiche Art der bereits vorhandenen Erdalkalitionen oder eine fremde Art hinzugefügt wird, z. B. zu  $\text{SrWO}_4$  U  $\text{BaO}$  usw. Der Verlauf der Kurven ist stets ähnlich. Die Abweichungen werden dann größer, wenn außer einem Erdalkalioxyd oder -carbonat noch ein sensibilisierendes Salz für die eine oder andere Farbe hinzugegeben wird.

Tabelle 1.

$\text{Na}_2\text{SO}_4$ (R)	$\text{Na}_2\text{HPO}_4$ (G)	$\text{KNO}_3$ (R + G)	$\text{Na}_2\text{SO}_3$ (—)
$\text{NaHSO}_4$ (R)	$\text{Na}_4\text{P}_2\text{O}_7$ (G)	$\text{NaNO}_3$ (R + G)	$\text{Na}_2\text{CO}_3$ (—)
$\text{Li}_2\text{SO}_4$ (R)	$\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$ (G)	$\text{CH}_3\text{COONa}$ (R + G)	$\text{NaOH}$ (—)
$\text{Na}_2\text{S}$ (R)	$\text{BeSO}_4$ (G)	$(\text{CH}_3\text{COO})_2\text{Sr}$ (R + G)	$\text{NaCl}$ (—)
$\text{MgSO}_4$ (R)	$\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$ (G)	$\text{Ba}(\text{NO}_3)_2$ (R + G)	$\text{KCl}$ (—)
$\text{MgBr}_2$ (R)	$\text{Na}_2\text{WO}_4$ (G)	$\text{CaF}_2$ (R + G)	$\text{NaJ}$ (—)
$\text{CaS}$ (R)		$\text{CaSO}_4$ (R + G)	$\text{CsCl}$ (—)
$\text{BaS}$ (R)		$\text{SrSO}_4$ (R + G)	$(\text{CH}_3\text{COO})_2\text{Pb}$ (—)
		$\text{BaSO}_4$ (R + G)	

Die als Zusätze zu den Erdkaliwolframaten verwendeten Salze. (R) bedeutet: rot sensibilisierend; (G) = grün sensibilisierend; (—) nicht sensibilisierend.

da dann die Anionen und Kationen dieser Salze eine zusätzliche Wirkung auf die Lumineszenzfarbe ausüben.

Man hat somit, um grün leuchtende Uran-aktivierte Erdalkaliwolframate zu erhalten, einen hohen Überschuß an Erdalkalioxyd bzw. -carbonat zu geben. Um rot leuchtende zu erhalten, müssen ein geringer Überschuß an Erdalkalioxyd und ein rot sensibilisierendes Salz hinzugefügt werden. Das gleiche gilt für die entsprechenden Molybdate.

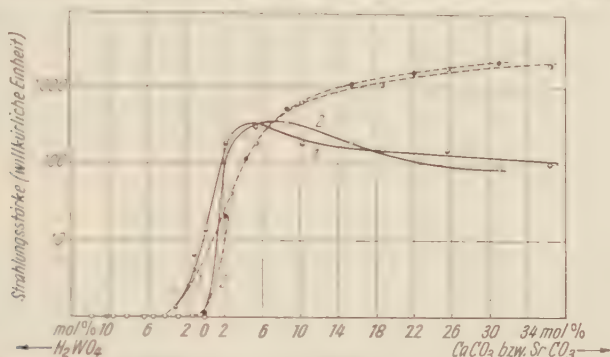


Fig. 2. Abhängigkeit der Strahlungsstärke der Lumineszenz bei  $-180^{\circ}\text{C}$  von der Zusammensetzung bei 1  $\text{CaWO}_4\text{-U}$  und 2  $\text{SrWO}_4\text{-U}$ . Rote Lumineszenz ausgezogen; grüne Lumineszenz gestrichelt.

Auf Grund dieser Versuche können für die Präparation von Uran-aktivierten Erdalkaliwolframat- und -molybdaten, die in verschiedenen Lumineszenzfarben optimal leuchten, genaue Angaben gemacht werden, wie sie in Tabelle 2 zusammengestellt sind.

Tabelle 2 Zusammenstellung günstiger Präparationen einiger Uran-aktivierter Erdalkaliwolframate und -molybdate.

<b><math>\text{CaWO}_4\text{-U}</math></b>			
Tiefgrün ( $20^{\circ}$ , $-180^{\circ}$ ):			
$\text{CaWO}_4 + 40 \text{ Mol-\% CaCO}_3 + 0,05 \text{ Mol-\% U}$	30 min	1200°C	
Rot ( $-180^{\circ}$ ):			
$\text{CaWO}_4 + 3 \text{ Mol-\% CaCO}_3 + 0,1 \text{ Mol-\% U} + 6 \text{ Mol-\% Na}_2\text{S}$	60 min	1100°C	
<b><math>\text{SrWO}_4\text{-U}</math></b>			
Grün ( $20^{\circ}$ , $-180^{\circ}$ ):			
$\text{SrWO}_4 + 40 \text{ Mol-\% SrCO}_3 + 0,05 \text{ Mol-\% U}$	30 min	1200°C	
Rot ( $20^{\circ}$ , $-180^{\circ}$ ):			
$\text{SrWO}_4 + 4 \text{ Mol-\% SrCO}_3 + 0,1 \text{ Mol-\% U} + 6 \text{ Mol-\% Na}_2\text{S}$	60 min	1100°C	
<b><math>\text{BaWO}_4\text{-U}</math></b>			
Grüngelb ( $20^{\circ}$ , $-180^{\circ}$ ):			
$\text{BaWO}_4 + 40 \text{ Mol-\% BaCO}_3 + 0,05 \text{ Mol-\% U}$	30 min	1200°C	
Rot ( $20^{\circ}$ , $-180^{\circ}$ ):			
$\text{BaWO}_4 + 4 \text{ Mol-\% BaCO}_3 + 0,1 \text{ Mol-\% U} + 6 \text{ Mol-\% Na}_2\text{S}$	60 min	1100°C	
<b><math>\text{CaMoO}_4\text{-U}</math></b>			
Rot ( $-180^{\circ}$ ):			
$\text{CaMoO}_4 + 2 \text{ Mol-\% CaCO}_3 + 0,1 \text{ Mol-\% U} + 6 \text{ Mol-\% Na}_2\text{S}$	60 min	1200°C	
<b><math>\text{SrMoO}_4\text{-U}</math></b>			
Rot ( $20^{\circ}$ , $-180^{\circ}$ ):			
$\text{SrMoO}_4 + 4 \text{ Mol-\% SrCO}_3 + 0,1 \text{ Mol-\% U} + 6 \text{ Mol-\% Na}_2\text{S}$	60 min	1200°C	



### *Einfluß der Urankonzentration.*

Eine große Zahl verschiedener Präparationen dieser Uran-aktivierten Erdalkaliwolframate hat übereinstimmend gezeigt, daß die maximale Strahlungsstärke der roten Bande bei einer Urankonzentration von etwa 0,4 Mol-% auftritt, während die maximale Strahlungsstärke der grünen Bande nur eine Urankonzentration von 0,02 bis 0,05 Mol % benötigt. Dies gilt unabhängig von der Zusammensetzung und der Glühbehandlung der Leuchtstoffe. Gleiche Verhältnisse ergeben sich auch bei den Uran-aktivierten Ca- und Sr-Molybdaten. Dieses deutet auf einen verschiedenartigen Einbau des Urans hin. Wenn das Uranleuchtzentrum für die rote und die grüne Lumineszenz den gleichen Platz einnehmen würde, dann wäre der verschiedenartige Einfluß der Urankonzentration auf die Strahlungsstärke beider Banden nicht einzusehen.

### *Änderung der Glühtemperatur.*

Die Versuche haben weiter gezeigt, daß bei diesen Leuchtstoffen für die Erzeugung einer maximalen Strahlungsstärke der roten Bande eine um 100 bis 300° höhere Glühtemperatur erforderlich ist als zur Erzeugung der maximalen Strahlungsstärke der grünen Bande. Die günstigsten Temperaturen liegen — bei einer Glühdauer von 1 Std. — bei 1150 bis 1250° C für rotes, und bei 950 bis 1150° C für grünes Leuchten.

### *Temperaturabhängigkeit der Lumineszenz.*

Fig. 3a und b zeigen als Beispiele den Verlauf der relativen Strahlungsstärke der roten und grünen Bande zweier verschieden zusammengesetzter Uran-aktivierter Erdalkaliwolframate in Abhängigkeit von

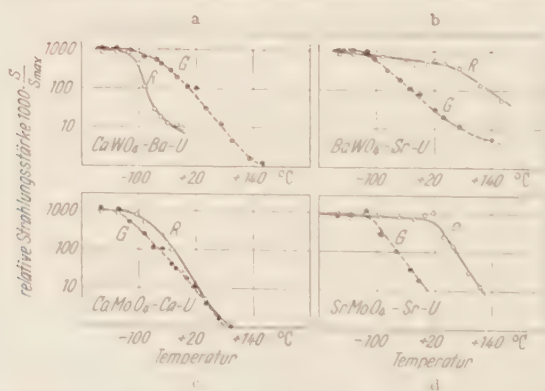


Fig. 3a–d. Abhängigkeit der relativen Strahlungsstärke der roten (R) bzw. grünen (G) Lumineszenz von der Temperatur.

der Temperatur, wobei die maximale Strahlungsstärke willkürlich je gleich 1000 gesetzt ist. Bei allen hier untersuchten Leuchtstoffen nimmt die Strahlungsstärke mit wachsender Temperatur ab. Charakteristisch

jedoch ist der verschiedenartige Verlauf der Abnahme beider Banden: Während dieser für die grüne Bande bei allen Uran-aktivierten Erdalkaliwolframaten nahezu der gleiche ist, ist der Verlauf für die rote Bande bestimmt durch die Art des Grundgitters. Der Abfall der roten Strahlungsstärke ist bei  $\text{CaWO}_4$  U am stärksten, bei  $\text{BaWO}_4$  U am schwächsten. Die Kurve für  $\text{SrWO}_4$  U geht etwa parallel zur „grün“-Kurve. Die Fig. 3 c und d zeigen die Kurven zweier entsprechender Molybdate. Auch hier ist die „grün“-Kurve unverändert, während die „rot“-Kurve vom Kation der Grundsubstanz bestimmt wird. Beide Kurven sind in ihrem Verlauf stets unabhängig von der Art des zugefügten Erdalkaliions. Man sieht also, daß die Temperaturabhängigkeit der grünen Bande vom Grundgitter unbeeinflusst ist im Gegensatz zur Temperaturabhängigkeit der roten Bande.

#### *Abklingmessungen an $\text{SrWO}_4$ -U.*

Anregung mit Licht der Wellenlänge 3650 Å ergab im Phosphoroskop bei einer Anregzeit von  $10 \cdot 10^{-4}$  sec exponentielles Abklingen beider Banden. Abklingmessungen bei Elektronenanregung ergaben ebenfalls exponentielle Abklingung. Als Abklingkonstanten wurden für beide Banden für Ultraviolettanregung  $10^4 \text{ sec}^{-1}$ , bei Elektronenanregung  $3 \cdot 10^4 \text{ sec}^{-1}$  gefunden mit einem Fehler von etwa 10%.

#### *Leitfähigkeitsuntersuchungen.*

Hier ergab sich an vorwiegend rot und vorwiegend grün leuchtenden Proben kein Einfluß des Uranaktivators auf den Photostrom. Der Photostrom rot und grün leuchtender Proben zeigte keinen Unterschied. Näheres über Versuchsanordnung und Ergebnisse findet sich in der Arbeit von GOBRECHT, HAHN und KÖSEL [4].

#### *Anregbarkeit der Uranlumineszenz.*

Versuche über die Anregbarkeit der Uranlumineszenz in Uran-aktivierten Erdalkaliwolframaten und -molybdaten zeigten verschiedene Ergebnisse für die rote und grüne Bande. Das spektral zerlegte Licht einer Hg-Hochdrucklampe erregte den Leuchtstoff, dessen Lumineszenz mit einer der obengenannten Filterkombinationen betrachtet wurde. Dabei ergab sich folgendes: Die rote und die grüne Emissionsbande lassen sich im Gebiet von 265 bis 391 mμ gut anregen. Dabei regen die Linien Hg 365 und Hg 391 mμ beide Banden besonders stark an. Die rote Bande allein läßt sich darüber hinaus noch von der Linie Hg 405 mμ gut anregen, die grüne dagegen nicht.

Elektronen von einigen Tausend Elektronenvolt erregen beide Banden gleichmäßig kräftig. Eine Anregbarkeit durch Röntgenstrahlung von

50 kV besteht nicht. Verschiedenheiten der Reflexionsfarbe im Sichtbaren sind nicht vorhanden: Alle Substanzen sind (bei höchstens 0,1 Mol-Urankonzentration) rein weiß.

### Die spektrale Verteilung der Lumineszenz

Besonders auffallend ist die Veränderung der spektralen Lage der Emission bei Variation der Zusammensetzung. Um beide Banden gut

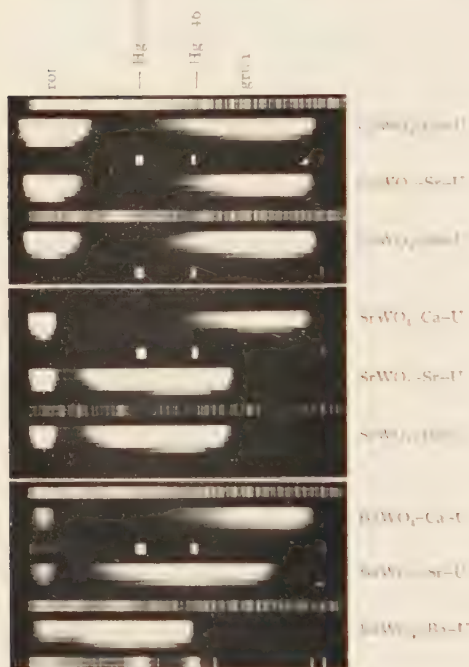


Fig. 4. Spektralaufnahmen der Lumineszenz verschiedener Uranaktivierter Erdalkaliumwolframate.

photographieren zu können, wurden diese Versuche nur mit Wolframaten durchgeführt, welche stark (8 Mol-%) mit Erdalkalicarbonat versetzt waren. Fig. 4 zeigt neun Spektralaufnahmen. Man sieht deutlich, daß sich bei gleicher Grundsubstanz die rote Bande durch Zugabe verschiedener Erdalkalicarbonate überhaupt nicht verschiebt. Die grüne Bande verschiebt sich bei  $\text{CaWO}_4$ -U nicht. Bei  $\text{SrWO}_4$ -U verschiebt sie sich bei Ersatz von  $\text{SrCO}_3$  durch  $\text{CaCO}_3$  zu kürzeren Wellen, beim  $\text{BaWO}_4$ -U bei Ersatz von  $\text{BaCO}_3$  durch  $\text{SrCO}_3$  ebenfalls und durch  $\text{CaCO}_3$  noch weiter nach kürzeren Wellen. Man sieht also, daß eine Verschiebung der grünen Bande nur dann erfolgt, wenn ein

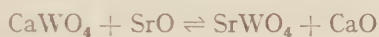
Erdalkalium hinzugefügt wird, welches kleiner ist als das Erdalkalium des Wolframat. Nur das kleinere Erdalkalium bestimmt die Lage der grünen Uranlumineszenz, unabhängig vom Grundgitter. In der Tat bewirken nicht nur Erdalkalicarbonate und -oxyde diese Verschiebungen der grünen Bande, sondern alle Salze, die ein entsprechendes Erdalkalium besitzen, z.B.  $\text{CaF}_2$ ,  $\text{Ca(NO}_3)_2$ ,  $\text{CaS}$  usw. Dabei können die Zusatzkonzentrationen schwanken zwischen 2 und 30 Mol-%. Diese Ergebnisse sind unabhängig von Urankonzentration und Glühbedingungen.



Auftreten typischer Uranylbanden, wie man sie z. B. von der Lumineszenz von Uranylsalzen her kennt.

Um die Struktur der roten Bande zu erkennen, wurden die Spektralaufnahmen photometriert. Während bei  $\text{CaWO}_4\text{-U}$ ,  $\text{BaWO}_4\text{-U}$  und  $\text{CaMoO}_4\text{-U}$  mit verschiedenen Erdalkalizugaben keine Struktur zu erkennen war, bemerkt man bei  $\text{SrWO}_4\text{-U}$  und  $\text{SrMoO}_4\text{-U}$  bei tiefer Temperatur eine deutliche Strukturierung der roten Bande.

Die Verschiebung der grünen Bande durch Einwirkung von Fremdionen ist nicht auf Gitteränderungen zurückzuführen: DEBYE-SCHERRER-Aufnahmen an diesen Präparaten haben keine Änderung der Gitterkonstanten über 0,03% durch Zugabe von 8 Mol-% Erdalkalioxyd angezeigt. (Die mittlere Änderung der Gitterkonstanten bei Übergang von  $\text{CaWO}_4$  zu  $\text{BaWO}_4$  beträgt etwa 4%.) Es tritt auch keine Änderung der roten Bande ein, was ebenfalls Gitteränderungen ausschließt. McKEAG und RANBY [5] fanden allerdings röntgenographisch Gitteränderungen bei Zugaben von  $\text{SrO}$  und  $\text{MgO}$  zu  $\text{CaWO}_4$ , jedoch ohne die Oxydkonzentrationen angegeben zu haben. Bei zu hoher Oxydkonzentration wird sich natürlich etwa aus



bilden und damit auch die Lage der roten Bande verschieben, was unsere Versuche auch bestätigt haben.

### *Diskussion der Ergebnisse.*

Abkling-, Leitfähigkeitsmessungen und die zum Teil strukturiert auftretenden Banden machen es wahrscheinlich, daß es sich bei der Lumineszenz beider Banden um „monomolekulare“ Vorgänge handelt, der Ursprung der Lumineszenz also wohl in geschlossenen Komplexen des Urans zu suchen ist. Als solche Komplexe kommen nur die des 6-wertigen Urans, also das Uranyl-Ion  $\text{UO}_2^{2+}$  und das Uranat-Ion  $\text{UO}_4^{2-}$ , in Frage. Beide unterscheiden sich voneinander in der „Umgebung“ des Uranatoms.

Da reine Uranylsalze in ihrer grünen Fluoreszenz der grünfluoreszierenden Varietät der hier behandelten Stoffe sehr ähnlich sind, wird man auch in den Uran-aktivierten Wolframatn die  $\text{UO}_2^{2+}$ -Gruppe für die grüne Lumineszenz verantwortlich machen dürfen. Hingegen hat die rote Lumineszenz dieser Stoffe möglicherweise in den Uranatkomplexen ihren Ursprung. Diese Vermutung gibt auch KRÖGER [1] an. Ein Beweis für die Richtigkeit dieser Vermutung ist aber nicht vorhanden.

Während die grüne Lumineszenz in vielen mit Uran aktivierten Stoffen und in reinen Uranylsalzen beobachtet wird, existiert die rote Lumineszenz — soweit bis heute, einschließlich dieser Arbeit, bekannt —

nur in den Uran-aktivierten Wolframat- und Molybdaten der Metalle der zweiten Haupt- und Nebengruppe einschließlich des  $\text{BaWO}_4$  und in den Molybdaten von Ca und Sr. Auch in Alkali- und Erdalkaliuranaten ist sie nicht zu finden. Es scheint also die Existenz der roten Bande an das Wolframat- bzw. Molybdatgitter der Scheelitform gebunden zu sein. Die Lumineszenz von Zn-, Cd-, Mg-Wolframat, die im Wolframatgitter kristallisieren, hat andere Eigenschaften, auf die hier nicht eingegangen wird.

Dieser Sachverhalt wird durch unsere Versuche bestätigt: Das Temperaturverhalten der Strahlungsstärke, die Spektrallage und die Bandenstruktur der roten Lumineszenz werden nur durch das Grundgitter, nicht aber durch irgendwelche Zusätze zum Grundgitter bestimmt.

Demgegenüber ist die Existenz der grünen Lumineszenz nicht an das Grundgitter gebunden. Das zeigen die Unabhängigkeit des Temperaturverhaltens der Strahlungsstärke vom Grundgitter sowie der Spektrallage und der Bandenstruktur vom Grundgitter, wenn diesem bestimmte Kationenzusätze hinzugefügt werden.

Auf Grund dieses verschiedenen Verhaltens der beiden Banden können Aussagen über die nähere „Umgebung“ des Aktivators gemacht werden: Da nämlich die grüne Bande in ihrer spektralen Verteilung stark von Kationenzugaben beeinflusst wird, die rote dagegen aber völlig unempfindlich ist, könnte man das „grüne“ Zentrum in der „Nähe“ eines hochgeladenen Kations, das „rote“ — gut gegen elektrostatische Kräfte abgeschirmte — etwa im  $\text{WO}_4^{2-}$  bzw.  $\text{MoO}_4^{2-}$  — Tetraeder lokalisieren. Eine verschieden große Einbauwahrscheinlichkeit beider Zentren liegt offensichtlich vor, wie man aus dem verschiedenen Einfluß der Urankonzentration und der Glühtemperatur auf die Strahlungsstärke beider Banden entnehmen kann. Die höhere Einbauwahrscheinlichkeit hat hiernach das „grüne“, die geringere das „rote“ Zentrum. Man könnte sogar zufolge dieser — allerdings recht geringen — Unterschiede annehmen, daß das „rote“ Zentrum isomorph, das grüne aber in Zwischengitterplätzen angeordnet ist. Die starke Wechselwirkung des roten Zentrums mit dem Gitter, die besonders gut die Temperaturcharakteristik der Strahlungsstärke zeigt, befürwortet übrigens diese Deutung.

Da Zugaben von Fremdkationen, die das grüne Leuchten in seiner spektralen Verteilung beeinflussen, nach unseren Versuchen keine Änderung der Gitterdimensionen zur Folge haben, ist die obige Annahme, dem grünen Zentrum einen Zwischengitterplatz zuzuordnen, nicht abwegig. Sie geht mit der beobachteten Temperaturcharakteristik der Strahlungsstärke konform. Das beeinflussende Kation kann dabei offenbar isomorph (z. B. in  $\text{CaWO}_4$   $\text{BaO}$  U) oder in Zwischengitterplätzen (z. B. in  $\text{BaWO}_4$   $\text{CaO}$  U) angeordnet sein. Maßgebend für die Beeinflussung ist wahrscheinlich nur das Ladungsdichteverhältnis von Überschußkation zu Grundgitterkation.

Der verschiedene Charakter beider Banden macht sich auch in der verschiedenartigen Sensibilisierbarkeit bemerkbar. Während für die grüne Lumineszenzintensität insbesondere Erdalkalitionen (unabhängig von der Anionenart) sensibilisierend wirken, wird die rote Intensität durch Zugabe gewisser Anionen ( $O^{2-}$ ,  $S^{2-}$ ,  $SO_4^{2-}$  usw.) (unabhängig von der Kationenart) verstärkt.

Da das „grüne“ Zentrum als in der „Nähe“ der Kationen liegend gedeutet wurde, ist die Verstärkung des Leuchtens mit wachsender Überschußkationenzahl verständlich. Der gleiche Effekt schließt einerseits nach dem Massenwirkungsgesetz den isomorphen Einbau der Uranyl- $(UO_4^{2-})$ -Komplexe in das Gitter, also die Bildung von  $UO_2WO_4$ , aus. Andererseits könnte mit der Möglichkeit der Bildung von Erdalkaliuranat gerechnet werden, was wiederum die (Uranat)  $UO_4^{2-}$ -Komplexe als „grüne“ Leuchtzentren markieren würde.

Ähnlich wird sich die Sensibilisierung der gittergebundenen roten Lumineszenz durch Anionenzugaben kaum deuten lassen, wenn man nicht gerade annimmt, daß diese Anionen die Grundgitterplätze der  $WO_4^{2-}$ -Ionen einnehmen. Vielleicht aber beruht dieser Sensibilisierungseffekt zum Teil nur auf einem Wegfangen der für die grüne Lumineszenz notwendigen Erdalkalitionen durch die Zugabeanionen, so daß die rote Lumineszenzintensität teilweise nur auf Kosten der grünen anwachsen kann. In der Tat scheinen unsere Ergebnisse (Fig. 1) dies zu bestätigen. Daneben kann allerdings noch ein anderer Vorgang – etwa eine Koaktivierung – stattfinden, der das Entstehen der roten Lumineszenz begünstigt.

Herrn Dr. D. HAHN danken wir für zahlreiche Diskussionen, der Deutschen Forschungsgemeinschaft für finanzielle Unterstützung dieser Arbeit.

### Literatur.

[1] KRÖGER, F. A.: Some Aspects of the Luminescence of Solids, S. 151. New York, Amsterdam u. London 1948. — [2] GARLICK, G. F. J.: Luminescent materials. Oxford 1949. — [3] GMELIN: W-Bd., S. 289 ff. — [4] GODRECHT, H., D. HAHN u. H.-J. KÖSEL: Z. Physik **136**, 57 (1953). — [5] McKEAG, H., u. P. W. RANBY: USA. Pat. Spec. 2, 257, 699.

Berlin-Charlottenburg, II. Physikalisches Institut der Technischen Universität.



## Zur Theorie der inneren Feldemission.

Von

F. SAUTER und J. WEISSE.

Mit 1 Figur im Text.

(Eingegangen am 5. November 1954.)

Es wird eine besonders übersichtlich erscheinende Methode zur Ableitung der ZENER-Formel für die innere Feldemission angegeben, welche im PEIERL'schen Grenzfall schmaler verbotener Energiezonen im Material anwendbar ist.

Unter der inneren Feldemission in einem Kristall versteht man bekanntlich den Übergang eines Elektrons aus dem Valenzband in das Leitungsband des Kristalls unter der Wirkung eines von außen an das Material angelegten elektrischen Feldes. Dieser Vorgang kann nach CL. ZENER<sup>1</sup>, in Analogie zur äußeren Feldemission an einem Metallrand, als ein wellenmechanischer Tunneleffekt durch ein für die Elektronen verbotenes Gebiet aufgefaßt werden, nämlich durch die im Feld gekippte verbotene Zone zwischen Valenz- und Leitungsband. Zur Ermittlung der (nicht streng berechenbaren) Wahrscheinlichkeit für diesen Elektronendurchtritt wurden verschiedene Näherungsverfahren herangezogen, die im wesentlichen stets zu den gleichen Formeln führten, so daß man das Problem der inneren Feldemission heute als im wesentlichen geklärt ansehen kann<sup>2</sup>. Wenn hier dennoch erneut auf dieses Problem eingegangen wird, so geschieht dies, um eine bisher anscheinend noch nicht benutzte Methode mitzuteilen, die in einem bestimmten Grenzfall eine wohl besonders einfache und übersichtliche Behandlung der inneren Feldemission gestattet und die unter Umständen auch bei anderen ähnlichen Problemen angewandt werden kann.

Die Hauptaufgabe bei der Berechnung der Durchtrittswahrscheinlichkeit besteht im Aufsuchen einer möglichst zweckmäßigen Näherungslösung der für das Problem zuständigen SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(r) + e_0 (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{r}) \right\} \psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (1)$$

in der  $U(r)$  das Gitterpotential und  $\vec{\mathcal{E}}$  die als räumlich und zeitlich konstant angenommene äußere Feldstärke bedeutet; die Elektronenladung wurde dabei mit  $-e_0$  bezeichnet.

<sup>1</sup> ZENER, CL.: Proc. Roy. Soc. Lond. A **145**, 523 (1934).

<sup>2</sup> Vgl. den zusammenfassenden Bericht von W. FRANZ in den Erg. exakt. Naturwiss. **27** (1953), insbes. S. 13—20.

Im feldfreien Fall ( $\tilde{\mathfrak{A}} = 0$ ) kann man zur angenäherten Lösung von (1), je nach der Stärke der Potentialschwankungen im Gitter, entweder nach PEIERLS in erster Näherung mit freien Elektronen rechnen und die Potentialschwankungen im Gitter als Störung behandeln, oder aber nach BLOCH von den an die einzelnen Gitterbausteine gebundenen Elektronen ausgehen.

Auch im Fall  $\tilde{\mathfrak{A}} \rightarrow 0$  könnte man zunächst an ähnliche Näherungsverfahren denken. Doch läßt sich nur im Fall schwacher Potentialschwankungen im Gitter ein der PEIERLSSchen Behandlung nachgebildetes Verfahren durchführen, indem man in erster Näherung mit Wellenfunktionen rechnet, welche das Verhalten von Elektronen allein im  $\tilde{\mathfrak{A}}$ -Feld beschreiben, und das Gitterpotential  $U(r)$  als Störung betrachtet; dieses Verfahren wird im folgenden dargestellt. Eine entsprechende Übertragung der BLOCHschen Behandlung scheitert an der Unkenntnis der Wellenfunktionen von an Gitterionen gebundenen Elektronen im  $\tilde{\mathfrak{A}}$ -Feld.

Liegt also der PEIERLSSche Grenzfall schwacher Potentialschwankungen vor, so ist es zweckmäßig, in erster Näherung mit den von C. G. DARWIN<sup>1</sup> angegebenen Impulseigenfunktionen

$$\psi_t(r, t) = a_t \exp \left\{ i \left( \mathfrak{R}(t), r \right) - \frac{i \hbar}{2m} \int_0^t \mathfrak{R}^2(\tau) d\tau \right\} \quad (2)$$

zu rechnen, wobei zur Abkürzung

$$\mathfrak{R}(t) = \mathfrak{k} - \frac{e_0}{\hbar} \mathfrak{F}t \quad (3)$$

gesetzt wurde. Ersichtlich stellen diese Funktionen Wellenvorgänge dar, bei denen sich die Impulseigenwerte  $p = \hbar \mathfrak{R}$  durch das Feld im Sinn der klassischen Mechanik zeitlich ändern.

Durch das Gitterfeld werden die reinen Zustände (2) gestört und gehen dadurch in eine Überlagerung aus solchen Zuständen über, beschrieben durch Wellenfunktionen der Form

$$\psi(r, t) = \int dV_t a_t(t) \exp \left\{ i \left( \mathfrak{R}(t), r \right) - \frac{i \hbar}{2m} \int_0^t \mathfrak{R}^2(\tau) d\tau \right\}. \quad (4)$$

<sup>1</sup> DARWIN, C. G.: Proc. Roy. Soc. Lond. A **154**, 61 (1936). Zu völlig analogen Funktionen, nämlich

$$\psi'_t(r, t) = b_t \exp \left\{ i \left( \mathfrak{k}, r \right) - \frac{i \hbar}{2m} \int_0^t \mathfrak{R}^2(\tau) d\tau \right\} \quad (3')$$

kommt man als Energie- und Impulseigenfunktionen, wenn man das  $\tilde{\mathfrak{A}}$ -Feld nicht, wie in (1), durch ein skalares Potential, sondern durch ein Vektorpotential  $\mathfrak{A} = \frac{e_0}{\hbar} \mathfrak{F}t$  beschreibt. Dabei gehen die Funktionen (3') aus den Funktionen (3) durch eine Eichtransformation hervor. Vgl. hierzu F. SAUTER, Ann. Physik (5) **43**, 404 (1943).

Dabei besteht für die Amplituden  $a_j(t)$  wegen (1) die noch strenggültige Gleichung

$$\hbar \frac{da_j(t)}{dt} = \sum_i U_i a_{i-2\pi b_j}(t) \exp \left\{ \frac{i\hbar}{2m} \int_0^t \mathfrak{K}^2(\tau) - (\mathfrak{K}(\tau) - 2\pi b_j)^2 d\tau \right\}, \quad (5)$$

wenn man die gitterperiodische Potentialfunktion  $U(\mathbf{r})$  durch die FOURIER-Reihe

$$U(\mathbf{r}) = \sum_j U_j \exp \{2\pi i (\mathbf{b}_j, \mathbf{r})\} \quad (6)$$

darstellt und unter  $\mathbf{b}_j$  die Ortsvektoren der Netzkpunkte im reziproken Gitter versteht.

Nach (5) induziert also die Gitterstörung Übergänge zwischen den einzelnen Elektronenzuständen, die auch im äußeren Feld genau den LAUESchen Interferenzbedingungen im Kristallgitter entsprechen<sup>1</sup>. Geht man nämlich von einem Anfangszustand mit dem scharfen Ausbreitungsvektor  $\mathfrak{K}_0(0) = \mathfrak{k}_0$  aus, so treten in der Streuwelle erster Näherung nach (5) nur Elektronenzustände auf, deren Ausbreitungsvektor  $\mathfrak{K}(t)$  sich vom Ausbreitungsvektor  $\mathfrak{K}_0(t)$  der Primärwelle gerade um das  $2\pi$ -fache eines reziproken Gittervektors  $\mathbf{b}_j$  unterscheidet, für die also wegen (3)

$$\mathfrak{K}(t) - \mathfrak{K}_0(t) = \mathfrak{k} - \mathfrak{k}_0 = 2\pi \mathbf{b}_j \quad (7)$$

gilt. Auf die Impulsbilanz bei den Elektroneninterferenzen hat somit die durch das Feld bedingte Driftbewegung im  $\mathfrak{K}$ -Raum keinen Einfluß.

Anders bei der Energie! Ohne Feld wird der durch (7) charakterisierte Interferenzübergang im allgemeinen wegen der Verschiedenheit der zu  $\mathfrak{k}_0$  und zu  $\mathfrak{k}$  gehörigen Energien nicht möglich sein. Im Feld ändern sich aber diese Energien in verschiedener Weise, so daß die Möglichkeit eines Gleichwerdens derselben in einem bestimmten Zeitpunkt durchaus gegeben ist. Und zwar folgt aus

$$\mathfrak{K}_0^2(t) = \mathfrak{K}^2(t) \quad (8)$$

<sup>1</sup> In der Metallelektronentheorie ist es vielfach üblich geworden, statt von LAUE-Interferenzen von BRAGGSchen Reflexionen zu sprechen, auch wenn die Interferenzbedingung nicht in der von BRAGG gegebenen Form  $2d \sin \vartheta/2 = n\lambda$  vorliegt, sondern in der auf M. v. LAUE zurückgehenden, mit (7) identischen Form  $(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_0, \mathbf{a}_j) = 2\pi n_j$ . Es bedeutet sicherlich keine Schmälerung der allgemein anerkannten Verdienste BRAGGS um die Klärung der Interferenzerscheinungen an Kristallen, wenn hier dafür eingetreten wird, daß auch in der Metallelektronentheorie von LAUE-Interferenzen gesprochen wird, sobald die ganze Blickrichtung mehr den Interferenzbedingungen (7) als der Vorstellung einer Reflexion an Netzebenen entspricht. — In diesem Sinn der Wahrung historischer Priorität müßte beispielsweise in der von dem einen von uns angeregten und betreuten Dissertation des Herrn H. GERSTENKORN [Ann. Physik **10**, 49, 80 (1952)] über den elektrischen Widerstand von Metallen in der Nähe des Schmelzpunktes statt von BRAGG-Reflexionen und BRAGG-Faktoren meist von LAUE-Interferenzen und LAUE-Faktoren die Rede sein.



mit (7) und (3) für diesen Zeitpunkt

$$t \equiv t_i = \frac{\hbar}{e_0 (\tilde{\gamma} b_j)} (b_j, \mathfrak{k}_0 + \pi b_j). \quad (9)$$

Liegt er innerhalb der Beobachtungszeit, so wird man mit dem Auftreten der durch den Index  $i$  gekennzeichneten Interferenz zu rechnen haben.

Man kann sich die Verhältnisse an einer zweidimensionalen Darstellung des  $\mathfrak{K}$ -Raumes klarmachen (vgl. Fig. 1 mit den für ein quadratisches Flächengitter eingetragenen BRILLOUINSchen Zonen). Geht man von dem Ausbreitungsvektor  $\mathfrak{K}_{0(0)} = \mathfrak{k}_0$  eines bestimmten Elektronenzustandes zur Zeit  $t = 0$  aus und verfolgt die geradlinige Wanderung

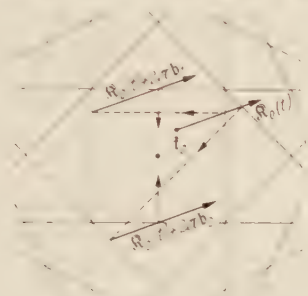


Fig. 1.

des Endpunktes des Vektors  $\mathfrak{K}_{0(t_i)}$  mit der Zeit, so trifft man zu einer bestimmten Zeit  $t_1$  auf eine der BRILLOUINSchen Grenzlinien, die etwa dem Vektor  $b_1$  entsprechen möge; dabei sind  $t_1$  und  $b_1$  miteinander durch die Beziehung (9) verknüpft. Beim Durchwandern von  $\mathfrak{K}_0$  durch diese Grenzlinie besteht die Möglichkeit einer zum Vektor  $b_1$  nach (7) gehörigen Interferenzreflexion. Diese Reflexion, charakterisiert durch eine gestrichelte Linie in Fig. 1, wird mit einer bestimmten, unten berechneten Wahrscheinlichkeit eintreten. Der nicht reflektierte Anteil der Primärwelle, oder besser gesagt der Endpunkt des  $\mathfrak{K}_0$ -Vektors trifft beim Weiterlaufen auf eine weitere BRILLOUINSche Grenzlinie, an der wiederum eine Interferenzreflexion möglich ist, usw. Durch das  $\tilde{\gamma}$ -Feld werden eben die Wellenlängen der einzelnen Elektronenzustände in solcher Weise stetig verändert, daß ab und zu eine LAUE-Interferenz bzw. eine BRAGG-Reflexion eintreten kann.

Zur Berechnung der Reflexionswahrscheinlichkeiten aus der Gl. (5) hat man als Anfangsbedingung etwa  $a_i(t=0) = \delta(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_0)$  zu setzen. Dann kommt man bei Vernachlässigung der zwei- und mehrfachen Reflexionsprozesse zur Beziehung

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial a_i(t)}{\partial t} &= \sum_j U_j \delta(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_0 - 2\pi b_j) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{2\pi i \hbar}{m} (b_j, \mathfrak{k}_0 + \pi b_j) t - \frac{i \pi e_0}{m} (\tilde{\gamma}, b_j) t^2 \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

die sich unmittelbar integrieren läßt. Dabei treten die aus der Optik bekannten FRESNELSchen Integrale  $C$  und  $S$  auf, die durch

$$C(s) + iS(s) = \int_0^s d\sigma \exp \{i\pi\sigma^2/2\} \quad (11)$$

definiert sind und sich in Form der CORST-Spirale darstellen lassen. Da  $C$  und  $S$  als Funktionen von  $s$  für  $|s| > 1$  um die Konvergenzpunkte  $+\frac{1}{2}$  und  $-\frac{1}{2}$  oszillieren, schwankt das Integral  $\int_0^s d\sigma \exp \{i\pi\sigma^2/2\}$  in Abhängigkeit von den Grenzen  $s_1$  und  $s_2$  nur relativ wenig und besitzt kleine Werte, solange  $s_1$  und  $s_2$  das gleiche Vorzeichen und nicht zu kleine Beträge haben; es erhält jedoch angenähert den Wert  $1-i$  für  $-s_1 = 1$ ,  $s_2 > 1$ . Bei den aus (10) folgenden Zeitintegralen liegt der dem Punkt  $s = 0$  entsprechende Zeitpunkt, in dem die Phasenfunktion des Zeitintegrals stationär wird, im  $j$ -ten Summenglied genau bei dem durch (9) gegebenen Wert  $t_j$ . Liegt also dieser Zeitpunkt außerhalb des zeitlichen Integrationsintervalles, so führt die Zeitintegration nach (10) nur zu einer schwachen, schnellen Oszillation von  $a_{t_0+2\pi b_j}(t)$ , entsprechend den bei jeder nichtstationären Störungsrechnung auftretenden Schwankungen. Fällt aber  $t$  in die Beobachtungszeit hinein, so wächst  $a_{t_0+2\pi b_j}(t)$  in der unmittelbaren Nähe dieses Zeitpunktes dem Betrag nach auf  $(\frac{1}{2} h) \cdot |U_j| \cdot [m/2e_0 (\tilde{\gamma} b_j)]$  an. Dabei ist die Wurzel durch die Transformation des  $t$ -Integrals in die Form (11) bedingt und stellt (mit ihrer Größenordnung von  $10^{-13}$  bis  $10^{-11}$  sec) ungefähr die Zeitdauer dar, innerhalb welcher der Integralwert wesentlich anwächst, innerhalb welcher also die Interferenzreflexion stattfindet. Sie wird, ebenso wie  $t$ , unendlich groß für  $|\tilde{\gamma} b_j| = 0$  und ist um so kleiner, je größer die Feldkomponente senkrecht zur reflektierenden Netzebenenschar ist.

Liegt die Zeitspanne von  $t_j - [m/2e_0 (\tilde{\gamma} b_j)]$  bis  $t_j + [m/2r_{0j} (\tilde{\gamma} b_j)]$  ganz innerhalb der Beobachtungszeit, so wird der Reflexionskoeffizient für die durch  $b_j$  charakterisierte Netzebenenschar

$$R_j = \frac{a_{t_0+2\pi b_j}(t)^2}{a_{t_0}(t)^2} = \frac{m|U_j|^2}{h^2 e_0 |\tilde{\gamma} b_j|} \quad (12)$$

Ersetzt man hier noch den FOURIER Koeffizienten  $U_j$  des Gitterpotentials durch die Breite  $4E = 2|U_j|$  der Energieücke, welche mit der betrachteten Reflexion gekoppelt ist<sup>1</sup>, führt man ferner den Winkel  $\alpha$  zwischen dem Feld und der Normale der betreffenden Netzebenenschar ein und berücksichtigt schließlich, daß  $1/\tilde{\gamma}$  gleich dem zugehörigen

<sup>1</sup> Vgl. z. B. den Bericht von A. SOMMERFELD u. H. BETHE im Handbuch der Physik, Bd. XXIV/2, bes. S. 385 ff.

Netzebenenabstand  $d_j$  ist, so kann man statt (12) auch schreiben:

$$R_j = \frac{m(\Delta E_j)^2 d_j}{4 \hbar^2 e_0 F \cos \alpha_j} \quad (13)$$

Dann wird aber wegen der vorausgesetzten Kleinheit der Reflexionswahrscheinlichkeit die Durchtrittswahrscheinlichkeit durch die verbotene Zone  $D_j = 1 - R_j \approx \exp(-R_j)$  gegeben durch

$$D_j \approx \exp \left\{ - \frac{m(\Delta E_j)^2 d_j}{4 \hbar^2 e_0 F \cos \alpha_j} \right\} \quad (14)$$

Diese Formel entspricht der bekannten ZENER-Formel für den eindimensionalen Grenzfall schwacher Gitterstörung, enthält aber darüber hinaus auch die von W. FRANZ<sup>1</sup> angegebene Abhängigkeit von der Feldrichtung relativ zum Kristall.

Köln, Institut für Theoretische Physik der Universität.

<sup>1</sup> Vgl. den zusammenfassenden Bericht von W. FRANZ in den Erg. exakt. Naturwiss. **27** (1953), insbes. S. 13—20.



# Dämpfung von Ultraschallwellen in Flüssigkeiten.

Von

S. PARTHASARATHY, C. B. TIPNIS und M. PANCHOLY.

Mit 1 Figur im Text.

(Eingegangen am 6. November 1954.)

Zur Messung der Absorptionskonstanten von Ultraschall in Flüssigkeiten wurde eine verbesserte optische Methode angewandt. Das Verfahren ist schnell und einfach und liefert Resultate, deren Genauigkeit der anderer Präzisionsmethoden vergleichbar ist. Ergebnisse für 10 Flüssigkeiten werden angeführt.

## 1. Einleitung.

Bekanntlich werden Ultraschallwellen in Flüssigkeiten stärker gedämpft, als man nach der Theorie von STOKES <sup>1</sup> erwarten sollte. Um diese Anomalie zu erklären, sind mehrere Hypothesen entwickelt worden. Während indessen Übereinstimmung darüber besteht, daß die experimentellen Werte allgemein über den theoretischen liegen, weichen die Angaben über nach verschiedenen Methoden bestimmte Absorptionskonstanten dennoch stark voneinander ab. Im Hinblick auf diese Unterschiede werden in diesem Laboratorium seit ein paar Jahren Messungen an Flüssigkeiten nach verschiedenen Verfahren durchgeführt. Bisher wurden Resultate veröffentlicht, die nach mechanischen Methoden <sup>2</sup>, <sup>3</sup>, <sup>4</sup>, nach kürzlich entwickelten thermischen Methoden <sup>5</sup> bis <sup>11</sup> sowie schließlich nach einer verbesserten optischen Methode <sup>12</sup>, die durch die gleichzeitige Beugung zweier Lichtbündel gekennzeichnet ist, erhalten worden sind. Die nunmehr vorliegenden Resultate wurden nach einem Verfahren bestimmt, das eine Kombination der letzteren Methode mit einem optischen Verfahren von WILLARD <sup>13</sup> darstellt. Die Vorteile des Verfahrens liegen in Schnelligkeit und Sauberkeit der Ausführung.

## 2. Experimentelles.

Die experimentelle Anordnung stimmt im wesentlichen mit der in <sup>12</sup> beschriebenen überein und ist in Fig. 1 dargestellt. Zwei schmale monochromatische Lichtbündel ( $\lambda = 5461 \text{ \AA}$ ) mit parallelen Achsen durchqueren die Flüssigkeit in der Kuvette und kreuzen das Schallbündel senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Die an den Schallwellen entstehenden Beugungsbilder werden in der Brennebene zweier passend gewählter Kameralinsen beobachtet. Als Schallquelle dient ein in  $X$  Richtung

geschnittener Quarzkristall, der durch einen Hochfrequenz-Oszillator variabler Frequenz angeregt wird. Die beiden Elektroden am Kristall sind mit einem Röhrenvoltmeter verbunden, bei dem das Anzeigedisplay durch ein Galvanometer ersetzt ist. Mit diesem Galvanometer kann man die an den Elektroden anliegende Wechselspannung ablesen. Die Spannung ist in der Endstufe des Generators willkürlich regelbar.

Die Oberfläche der Flüssigkeit ist durch einen ausgehöhlten Schaumglasblock abgeschlossen, um die Ausbildung stehender Schallwellen zu vermeiden. Die Messung geht in folgender Weise vor sich:

Die Wechselspannung am Quarz wird, bei Null beginnend, stetig erhöht, bis die Lichtintensität der Linie nullter Ordnung des unteren

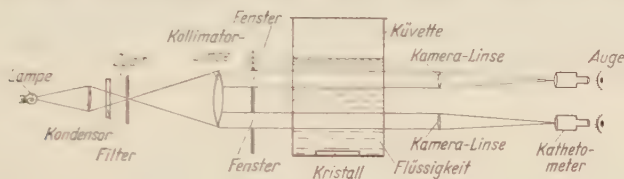


Fig. 1.

Beugungsbildes ein Minimum erreicht. Bei der Beobachtung durch ein Kathetometer werden die Linien höherer Ordnung durch einen Schirm abgedeckt, so daß nur die Linie nullter Ordnung im Gesichtsfeld ist. Die diesem Minimum korrespondierende Spannung wird am Galvanometer abgelesen. Vorausgesetzt wird, daß die Schwingungsamplitude des Quarzkristalles proportional der Amplitude der anregenden Wechselspannung ist. Dann gilt für die Amplitude  $A_1$  der Schallwelle am Beobachtungsort im Abstände  $x_1$  von der Oberfläche des Kristalles:

$$A_1 = A_0 \cdot e^{-\alpha x_1}$$

oder

$$A_1 = \text{const } V_1 \cdot e^{-\alpha x_1}, \quad (1)$$

wenn  $V_1$  die abgelesene Spannung ist,  $\alpha$  die halbe Absorptionskonstante der Flüssigkeit und  $A_0$  die Schallamplitude an der Oberfläche des Kristalles.

Daraufhin wird die Spannung derart geändert, daß die Beugungslinie nullter Ordnung des oberen Lichtbündels (Abstand  $x_2$  von der Oberfläche des Kristalls) ihr Intensitätsminimum erreicht. Ist die entsprechende Spannung  $V_2$  so gilt

$$A_2 = \text{const } V_2 \cdot e^{-\alpha x_2}. \quad (2)$$

Da nach dem erläuterten Einstellverfahren die Amplituden der Schallwellen  $A_1$  und  $A_2$  gleich sein müssen, folgt aus (1) und (2)

$$\alpha = \frac{\ln V_2/V_1}{(x_2 - x_1)}$$

$$\alpha/v^2 = \log_{10} V_2 - \log_{10} V_1 / 0,4343 \cdot d \cdot v^2, \quad (3)$$

wobei  $d$  der Abstand der Achsen der beiden Lichtbündel ist, und  $v$  die Frequenz des Schalles. Aus einer größeren Anzahl von Ablesungen wurden  $V_1$  und  $V_2$  bestimmt und  $\alpha/v^2$  als Mittelwert der jeweiligen Beobachtungsreihen ermittelt. Die Frequenz des Hochfrequenzgenerators wurde mit Hilfe eines Präzisions-Absorptions-Wellenmessers festgestellt. Die Wechselspannung wurde nur für kurze Zeiten am Kristall aufrechterhalten, um eine unzulässige Erwärmung der Flüssigkeit durch absorbierte Schallenergie zu vermeiden.

### 3. Ergebnisse und Diskussion.

Die Untersuchungsergebnisse sind in Tabelle 1 angegeben, die experimentellen Werte für  $\alpha/v^2$  in Spalte 5. Die Resultate sind in guter Übereinstimmung mit solchen, die nach anderen Präzisionsmethoden erhalten und in Spalte 7 aufgeführt worden sind. Die Werte stimmen gut mit den Werten der optischen Methode <sup>12</sup> überein, die der Vorläufer des jetzt angewandten Verfahrens ist. Die Resultate bestätigen anomale Absorption in den untersuchten Flüssigkeiten. Sie sind mit anderen in diesem Zusammenhange gewonnenen Daten im Hinblick auf eine mögliche Klärung der anomalen Absorption analysiert worden.

Tabelle I.

Nr.	Substanz	Frequenz $10^6 \cdot \text{sec}^{-1}$	Temperatur $^{\circ}\text{C}$	$\alpha \cdot 10^{12}$ $v^2$	Früherer Wert	Literatur
1	2	3	4	5	6	7
1	Benzol . . . .	4,911	29,7	906,2	830,0	13
2	Toluol . . . .	4,895	31,0	96,12	90,0	13
3	<i>m</i> -Xylol . . . .	6,896	30,2	75,85	78,0	13
4	Chloroform . .	4,900	30,1	388,00	380,0	13
5	Nitrobenzol . .	6,814	30,0	94,05	90,0	14
6	Hexylalkohol .	4,901	29,8	131,5		
7	Butylazetat . .	4,895	29,1	130,7		
8	Propylazetat .	4,885	29,7	144,7		
9	Amylazetat . .	6,844	29,5	106,5		
10	Äthylazetat a)	4,905	29,8	157,4	516 bei $v = 10^6 \text{ sec}^{-1}$	15
	Äthylazetat b)	2,961	29,8	252,3	37 bei $v = 69 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}$	16
	Äthylazetat c)	6,825	29,8	110,4		



## Literatur.

- [1] STOKES, G. G.: Camb. Trans. Phil. Soc. 8, 289 (1845). — [2] PARTHASARATHY, S., S. S. CHARI u. D. SRINIVASAN: Naturwiss. 39, 483 (1952). — [3] PARTHASARATHY, S., S. S. CHARI et D. SRINIVASAN: J. de Phys. 14, 541 (1953). — [4] PARTHASARATHY, S., S. S. CHARI u. D. SRINIVASAN: Acustica 3, 363 (1953). — [5] PARTHASARATHY, S., D. SRINIVASAN and S. S. CHARI: Nature, Lond. 166, 828 (1950). — [6] PARTHASARATHY, S., D. SRINIVASAN u. S. S. CHARI: Naturwiss. 39, 544 (1952). — [7] PARTHASARATHY, S., D. SRINIVASAN e S. S. CHARI: Nuovo Cimento 10, 264 (1953). — [8] PARTHASARATHY, S., e P. P. MAHENDROO: Nuovo Cimento 10, 1196 (1953). — [9] PARTHASARATHY, S., S. S. CHARI u. P. P. MAHENDROO: Z. Naturforsch. 8a, 272 (1953). — [10] PARTHASARATHY, S., S. S. CHARI et P. P. MAHENDROO: J. de Phys. 14, 366 (1953). — [11] PARTHASARATHY, S., P. P. MAHENDROO and S. S. MATHUR: J. Sci. a. Industr. Res. B 12, 457 (1953). — [12] PARTHASARATHY, S., u. M. PANCHOLY: Z. Physik 138, 635 (1954). — [13] WILLARD, G. W.: J. Acoust. Soc. Amer. 12, 438 (1941). — [14] PELLAM, J. R., and J. K. GALT: J. Chem. Phys. 14, 608 (1946). — [15] VERMA, G. S.: J. Chem. Phys. 18, 1352 (1950). — [16] BAR, R.: Helv. phys. Acta 10, 332 (1937).

New Delhi 12, National Physical Laboratory of India.

## Berichtigung und Ergänzung „zur linearen Feldtheorie“\*.

Von

WILLY SCHERRER.

(Eingegangen am 6. Dezember 1954.)

Eine numerische Angabe über das Weltalter wird korrigiert. Anschließend werden die allgemeinen Folgerungen über das Weltalter gezogen, welche die vorliegende Theorie gestattet.

I. Bei der numerischen Auswertung der periodischen Variante ist ein Versehen unterlaufen. Der in §6 (23c) angegebene Wert muß ersetzt werden durch

$$x_0 = -3,8 \cdot 10^{27} \text{ cm.} \quad (1)$$

Für das „Weltalter“ erhalten wir daher an Stelle von §6 (24)

$$t = \frac{\pi}{2\nu} + \frac{x_0}{c} = 0,67 \cdot 10^{17} \text{ sec} = 2,1 \cdot 10^9 \text{ Jahre.} \quad (2)$$

Dieser Wert steht nicht im Einklang mit dem aus der Radioaktivität erschlossenen Mindestalter von etwa  $4 \cdot 10^9$  Jahren.

Ganz allgemein schließt man aus §6 (13<sub>3</sub>) auf

$$t = \frac{2}{3kc} \operatorname{Arctg} \left( \frac{2\nu}{3k} \right) < \frac{2}{3kc} = 2,2 \cdot 10^9 \text{ Jahre.} \quad (3)$$

Wenn man also Anschluß an die radioaktiven Daten gewinnen will, muß man auch in der vorliegenden Theorie die periodische Variante ausschalten. Einen Vorbehalt zu dieser Folgerung werde ich unter IV. machen.

II. Als einzige Möglichkeit zur Verbesserung bleibt nur die erste Variante, also die aperiodische Variante mit singularem Anfang [§6 (10<sub>1</sub>) und (13<sub>1</sub>)].

Setzen wir

$$K = -1, \quad (4)$$

\* Siehe Z. Physik **139**, 44 (1954).

so können wir das Weltalter für diese Variante durch folgendes Integral ausdrücken

$$t = - \frac{1}{c^3} K \int_{\infty}^{\mu} \frac{d\mu}{\mu \sqrt{\mu + \frac{4\nu^2 K}{9c^2}}}, \quad (5)$$

wobei  $\mu$  die Massendichte darstellt.

Im Rahmen der NEWTONschen Gravitationstheorie findet man für die entsprechende Zeit das Integral

$$t = - \frac{1}{2 \cdot 6\pi C} \int_{\infty}^{\mu} \frac{d\mu}{\mu \sqrt{\mu + B\mu^{\frac{2}{3}}}}, \quad (6)$$

wobei  $C$  die NEWTONsche Gravitationskonstante ist.

Sollen die beiden Integrale am Anfang der Entwicklung, also für hohe Dichten  $\mu$ , übereinstimmen, so muß gelten

$$K = \frac{3}{\kappa}. \quad (7)$$

Gestützt auf (7) und (4) findet man weiter

$$2\nu = 3k \sqrt{1 - \frac{\kappa\mu c^2}{3k^2}}, \quad (8)$$

und die Auswertung von (5) liefert

$$t = \frac{1}{3k c} \cdot \frac{1}{W} \operatorname{Lg} \left| \frac{1+W}{1-W} \right|; \quad W \equiv \sqrt{1 - \frac{\kappa\mu c^2}{3k^2}}. \quad (9)$$

Wenn man schließlich mittels  $r \rightarrow ir$  zur periodischen Variante zurückkehrt, geht (9) über in

$$t = \frac{2}{3k c} \cdot \frac{1}{W} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} W, \quad W \equiv \sqrt{\frac{\kappa\mu c^2}{3k^2} - 1}. \quad (10)$$

Die beiden Varianten sind also voneinander durch die kritische Dichte

$$\mu^* = \frac{3k^2}{\kappa c^2} = 1,65 \cdot 10^{-28} \text{ g cm}^{-3} \quad (11)$$

getrennt.

Durch die Analyse von (10) und (9) gelangt man nun leicht zu folgendem

**Satz 1.** *Variiert die Dichte  $\mu$  monoton von  $+\infty$  bis 0, so variiert das Weltalter  $t$  monoton von 0 bis  $+\infty$ .*

Nach den Angaben der Astronomen ist die Dichte im Intervall

$$10^{-29} < \mu < 10^{-27} \quad (12)$$

zu suchen. KIENLE<sup>1)</sup> schließt die obere Grenze aus und schätzt,  $\mu$  werde am ehesten zwischen  $10^{-29}$  und  $10^{-28}$  liegen. Unsere Formel (9) liefert folgende Einzelwerte:

$$\mu_1 = 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}; \quad t_1 = 4,7 \cdot 10^9 \text{ Jahre} \quad (13)$$

$$\mu_2 = 3 \cdot 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}; \quad t_2 = 3,6 \cdot 10^9 \text{ Jahre.} \quad (14)$$

Wir kommen also auf Grund der empirischen Daten gerade auf diejenige Größenordnung, welche dem aus dem Atomzerfall erschlossenen Weltalter entspricht.

III. Die an Hand von (6) vorgenommene Eichung des aperiodischen Falles, welche auf 7 und 8 führt, entspricht nicht genau der an Hand von § 6 (14) vorgenommenen Eichung des periodischen Falles, die ihrerseits auf § 6 (18) und 21 a) geführt hat. Ich habe hier die frühere Eichung fallen lassen, weil im aperiodischen Fall keine minimale Dichte  $\mu_0$  existiert. Man stellt aber unschwer fest, daß der Zusammenhang der beiden Eichungen geregelt wird durch

Satz 2. *Beim Übergang von der aperiodischen Eichung zu der periodischen muß man in den Formeln (9) und (10)  $\mu$  durch  $\mu/3$  und in (7)  $K$  durch  $K/3$  ersetzen.*

Wie man aus 11, 13 und 14 ersieht bleiben wir damit immer noch im empirisch zulässigen Intervall. Welche Eichung den Vorzug verdient, kann vorderhand wohl kaum entschieden werden.

IV. Das differentielle Zerfallsgesetz für eine große Zahl  $N$  radioaktiver Teilchen lautet bekanntlich

$$\frac{\dot{N}}{N} = -\alpha, \quad (15)$$

wo  $\alpha$  die Zerfallskonstante bedeutet. Beziehen wir uns statt auf die Zeit  $t$  auf die Länge  $x_0 = ct$ , so haben wir zu schreiben

$$\frac{\dot{N}}{N} = -\frac{\alpha}{c}. \quad (16)$$

Die unbeeinflussbare Konstanz der Größen  $\alpha$  bildet die Grundlage aller radioaktiven Altersbestimmungen. Stellen wir nun neben (16) die Definition der HUBBLE-Zahl in der Gestalt

$$\frac{\dot{L}}{L} = k, \quad (17)$$

so kann man die Frage aufwerfen, inwiefern nun die rechte Seite von (16) weniger veränderlich sein soll als die rechte Seite von (17). Ich kann mir nicht vorstellen, wie man dafür empirische Gründe geltend machen will. Diese Gründe sind hypothetischer Natur und wurzeln letzten

<sup>1)</sup> KIENLE: Naturwiss. 38, 92 (1951).



Endes in der Vorstellung, es handle sich eben um einen diskontinuierlichen Elementarakkt.

Aber auch (17) bringt ein kosmisches Elementarphänomen zum Ausdruck, und sobald man einen Zusammenhang zwischen der singulären Anfangsphase und dem Atomzerfall herstellen will, muß man auch eine Proportionalität von  $\alpha$  und  $k$  in Betracht ziehen:

$$\frac{N'}{N} = - \frac{\alpha}{k c} \cdot \frac{L'}{L} . \quad (18)$$

Hierin würde nun  $k$  in Abweichung von (17) nur die momentan gemessene HUBBLE-Zahl bedeuten. Die Integration von (18) ergibt

$$\frac{N}{N_0} = \left( \frac{L}{L_0} \right)^{-\frac{\alpha}{k c}} . \quad (19)$$

Nach (19) waren dann alle Altersbestimmungen nur Aussagen relativ zum Weltalter. Sollte eine vollständigere kosmologische Lösung wieder auf den periodischen Fall zurückführen, so böte also der Ansatz (18) eine Möglichkeit, um einem Widerspruch mit der Endphase auszuweichen.

Vorderhand können wir also folgendes feststellen: Weil wir auf die aperiodische Lösung geführt worden sind, erzeugt die Annahme der absoluten Konstanz von  $\alpha$  keinen Widerspruch.

*Bern, Mathematisches Seminar der Universität.*

## Zur linearen Feldtheorie. II.

(Schwache Felder.)

Von

WILLY SCHERRER.

(Eingegangen am 25. November 1954.)

Für schwache Felder gilt ein System von Differentialgleichungen, welches eine Verallgemeinerung der MAXWELLSchen Vakuumsgleichungen darstellt. Eine spezielle Klasse bilden diejenigen schwachen Störungen, deren zugeordnete Gravitationspotentiale ungestört bleiben. Sie breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus und haben genau die Struktur der elektromagnetischen Wellen.

### § 1. Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung setzt die Kenntnis meiner „*Grundlagen zu einer linearen Feldtheorie*“<sup>1</sup> zitiert unter dem Zeichen G, sowie der daran anschließenden Note „*Zur linearen Feldtheorie I*“<sup>2</sup> zitiert unter dem Zeichen L I) voraus. Ihr Zweck ist zu prüfen, wie weit die MAXWELLSche Vakuumselektrodynamik in der linearen Feldtheorie enthalten ist.

Zur Erleichterung des Lesers will ich aber die in G und L I gewonnenen Grundgrößen und Grundbeziehungen noch einmal kurz zusammenstellen.

Im Zentrum steht das Wirkungsprinzip

$$\delta \int_{\mathcal{V}} \mathfrak{M} d\mathfrak{x} = 0 \quad (1)$$

mit

$$\mathfrak{M} = M \psi \quad (2)$$

und

$$M = -I_0 + \sum_{i=1}^3 (A_i M_i + \bar{A}_i \bar{M}_i). \quad (3)$$

Aus ihm folgen die *Feldgleichungen*

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left( \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \psi_{\lambda, \mu}} \right) = 0 \quad (4)$$

Dabei gilt

$$\mathfrak{T}^{\lambda, \mu} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \psi_{\lambda, \mu}} \quad (5)$$

<sup>1</sup> SCHERRER, W.: Z. Physik **138**, 16 (1954).

<sup>2</sup> SCHERRER, W.: Z. Physik **139**, 44 (1954).

und — dank der Beschaffenheit von  $\mathfrak{M}$  —

$$\dagger^{\lambda, \mu \nu} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial c_{\lambda \mu}} & \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial c_{\lambda \nu}} \\ \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial c_{\mu \lambda}} & \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial c_{\nu \lambda}} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Aus (4) und (6) folgen daher die *Erhaltungssätze*

$$\boxed{\begin{vmatrix} c_{\lambda \mu} & \dagger^{\lambda, \mu \nu} \\ c_{\mu \lambda} & \dagger^{\mu, \lambda \nu} \end{vmatrix}} = 0. \quad (7)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise werde ich mich der normierten Matrizen

$$||a_{ik}|| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (8)$$

und

$$\bar{a}_{ik}|| = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & -\eta & 0 \end{vmatrix} \quad (9)$$

bedienen. In den allgemeinen Formeln I. I. § 1 (3) für die 6 Invarianten  $M_i, \bar{M}_i$  werde ich also setzen

$$\left. \begin{aligned} a_{00} &= 1; & a_{11} &= a_{22} = a_{33} = -1 \\ a^{00} &= 1; & a^{11} &= a^{22} = a^{33} = -1 \\ a_{\lambda\mu} &= a^{\lambda\mu} = 0 & \text{für } \lambda \neq \mu \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

sowie

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{01} &= -\bar{a}_{10} = \varepsilon; & \bar{a}_{23} &= -\bar{a}_{32}, & & = \eta \\ & \text{alle übrigen } \bar{a}_{\lambda\mu} & & = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

Nun empfiehlt sich natürlich die Abkürzung

$$a_0 = a_{00}, \quad a_1 = a_{11} \quad \text{usw.}, \quad (8b)$$

wobei jetzt der Index  $\lambda$  in  $a_\lambda$  oder  $a^\lambda$  bei Summation doppelt zählt.

Die traditionelle Summationsvorschrift kann hierauf folgendermaßen gehandhabt werden: Über einen Index  $\lambda$  wird summiert, wenn er mit geradem Gewicht auftritt.

Einen entsprechenden Vorteil sichern wir uns für die Matrix (9), wenn wir statt  $\bar{a}_{\lambda\mu}$  schreiben  $\bar{a}_{\bar{\lambda}\bar{\mu}}$ , wobei nun  $\bar{\lambda}$  den nach (9) eindeutig bestimmten, zu  $\lambda$  „komplementären“ Index darstellt, also

$$\bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0, \quad \bar{2} = 3, \quad \bar{3} = 2. \quad (9b)$$

Schließlich kürzen wir noch ab gemäß

$$\bar{a}_\lambda = \bar{a}_{\lambda\bar{\lambda}}. \quad (9c)$$

Hier ist also zu beachten, daß bei der Anwendung der Summationsvorschrift sowohl der angeschriebene Index  $\bar{\lambda}$  als auch der nicht angeschriebene Index  $\bar{\lambda}$  einfach zählt.

Im Sinne dieser Verabredungen erhalten wir nun für die 6 Invarianten folgende Tafel:

$$M_1 = a_\alpha a_\beta a^\gamma f^{\alpha\beta}_{\gamma\gamma}, f^{\alpha\beta}_{\gamma\gamma}, \quad (10_1)$$

$$M_2 = a_\alpha f^{\alpha\sigma}_{\sigma\sigma}, f^{\alpha\sigma}_{\sigma\sigma}, \quad (10_2)$$

$$M_3 = a_\alpha f^{\alpha\sigma}_{\sigma\sigma}, f^{\alpha\sigma}_{\sigma\sigma}, \quad (10_3)$$

$$\bar{M}_1 = \bar{a}_\alpha \bar{a}_\beta a^\gamma f^{\alpha\beta}_{\gamma\gamma}, f^{\alpha\beta}_{\gamma\gamma}, \quad (\bar{10}_1)$$

$$\bar{M}_2 = \bar{a}_\alpha \bar{a}_\beta a^\gamma f^{\alpha\bar{\lambda}}_{\gamma\gamma}, f^{\beta\bar{\lambda}}_{\gamma\gamma}, \quad (\bar{10}_2)$$

$$\bar{M}_3 = \bar{a}_\alpha f^{\alpha\bar{\lambda}}_{\sigma\sigma}, f^{\sigma\sigma}_{\sigma\sigma}, \quad (\bar{10}_3)$$

Schließlich noch einige Bemerkungen zu den aus der Kosmologie erschlossenen Beziehungen zwischen den Kombinationszahlen  $A_1, A_2, A_3, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ . Dieselben lauten nach L I, § 4 (7)

$$2A_1 + A_2 + A_3 + 2\eta^2 (\bar{A}_1 + 2\bar{A}_2) = 0, \quad (11_1)$$

$$2A_1 + A_2 + 2A_3 = 0, \quad (11_2)$$

$$\varepsilon A_3 = 0, \quad (11_3)$$

$$3\eta^2 - \varepsilon^2 \neq 0; \quad \bar{A}_1 + 2\bar{A}_2 \neq 0. \quad (12)$$

Die Bedingung (11<sub>1</sub>) erwies sich als unerlässlich, um die Isotropie des Raumes zu gewährleisten. Die Bedingungen (11<sub>2</sub>) und (11<sub>3</sub>) waren darüber hinaus notwendig, um dem Raum Kugelsymmetrie zu verleihen. Die Bedingung (12) schließlich verhindert, daß durch die Bedingungen (11) die Wirkungsfunktion  $M$  annulliert wird.

Die zur Verfügung stehenden Konstanten  $A$  bilden also immer noch eine dreidimensionale lineare Schar. Doch wollen wir diese Freiheit nicht einschränken, bevor dafür zwingende Gründe vorliegen.

## § 2. Die Feldgleichungen.

In der Einleitung haben wir alles zusammengestellt, was wir brauchen, um die Feldgleichungen aufzustellen. Gestützt auf (2), (3) und (10) berechnen wir die Ausdrücke (5) und (6) und setzen dieselben in (4) ein. Es empfiehlt sich, alles entsprechend (3) in Komponenten aufzulösen. In diesem Sinne zerlegen wir also die Tensordichten  $T^{\alpha\sigma}$  und



$\mathfrak{T}^{\lambda, \mu \nu}$  in die Komponenten  $t^{\lambda, \mu \nu}$ ,  $\bar{t}^{\lambda, \mu \nu}$  und  $\mathfrak{T}^{\lambda, \mu}$ ,  $\bar{\mathfrak{T}}^{\lambda, \mu}$ . Die Rechnung liefert:

$$t_1^{\lambda, \mu \nu} = 2a_x a_\beta a^\lambda \psi^{\alpha, \mu} \psi^{\beta, \nu} f^{\alpha \beta}_{\lambda} \psi, \quad (1_1)$$

$$t_2^{\lambda, \mu \nu} = a_x (\psi^{\alpha, \mu} f^{\alpha \lambda, \nu} - \psi^{\alpha, \nu} f^{\alpha \lambda, \mu}) \psi, \quad (1_2)$$

$$t_3^{\lambda, \mu \nu} = a_x (\psi^{\alpha, \mu} \psi^{\lambda, \nu} - \psi^{\alpha, \nu} \psi^{\lambda, \mu}) f^{\alpha \nu}_{\nu} \psi, \quad (1_3)$$

$$\bar{t}_1^{\lambda, \mu \nu} = 2\bar{a}_x \bar{a}_\beta a^\lambda \psi^{\alpha, \mu} \psi^{\beta, \nu} f^{\alpha \beta}_{\lambda} \bar{\psi}, \quad (\bar{1}_1)$$

$$\bar{t}_2^{\lambda, \mu \nu} = 2\bar{a}_x \bar{a}_\beta a^\lambda \psi^{\alpha, \mu} \psi^{\beta, \nu} f^{\alpha \beta}_{\lambda} \bar{\psi}, \quad (\bar{1}_2)$$

$$\bar{t}_3^{\lambda, \mu \nu} = \left. \begin{aligned} &\bar{a}_x \psi^{\alpha, \mu} \psi^{\beta, \nu} f^{\lambda \alpha}_{\nu} \psi + \\ &\frac{1}{2} \bar{a}_x (\psi^{\beta, \nu} f^{\lambda \alpha}_{\alpha} - \psi^{\beta, \mu} f^{\lambda \alpha}_{\alpha}) \psi. \end{aligned} \right\} \quad (1_3)$$

Entsprechend ergibt sich für die Komponenten von  $\mathfrak{T}^{\lambda, \mu}$  die Tabelle:

$$\mathfrak{T}_1^{\lambda, \mu} = \mathfrak{M}_1 \psi^{\lambda, \mu} - 4a_x a_\beta a^\gamma \psi^{\alpha, \mu} f^{\lambda \beta}_{\gamma} f^{\alpha \gamma}_{\mu} \psi, \quad (2_1)$$

$$\mathfrak{T}_2^{\lambda, \mu} = \mathfrak{M}_2 \psi^{\lambda, \mu} - 2a_x (\psi^{\alpha, \mu} f^{\alpha \nu}_{\sigma} f^{\lambda \sigma}_{\nu} - f^{\alpha \mu}_{\sigma} f^{\lambda \sigma}_{\nu}) \psi, \quad (2_2)$$

$$\mathfrak{T}_3^{\lambda, \mu} = \mathfrak{M}_3 \psi^{\lambda, \mu} - 2a_x (\psi^{\alpha, \mu} f^{\alpha \nu}_{\sigma} f^{\lambda \sigma}_{\nu} - f^{\lambda \alpha}_{\sigma} f^{\alpha \mu}_{\nu}) \psi, \quad (2_3)$$

$$\bar{\mathfrak{T}}_1^{\lambda, \mu} = \bar{\mathfrak{M}}_1 \psi^{\lambda, \mu} - 4\bar{a}_x \bar{a}_\beta a^\gamma \psi^{\alpha, \mu} f^{\lambda \beta}_{\gamma} f^{\alpha \gamma}_{\mu} \bar{\psi}, \quad (\bar{2}_1)$$

$$\bar{\mathfrak{T}}_2^{\lambda, \mu} = \bar{\mathfrak{M}}_2 \psi^{\lambda, \mu} - 4\bar{a}_x \bar{a}_\beta a^\gamma \psi^{\alpha, \mu} f^{\lambda \beta}_{\gamma} f^{\alpha \gamma}_{\mu} \bar{\psi}, \quad (\bar{2}_2)$$

$$\bar{\mathfrak{T}}_3^{\lambda, \mu} = \bar{\mathfrak{M}}_3 \psi^{\lambda, \mu} - 2\bar{a}_x \psi^{\alpha, \mu} f^{\lambda \bar{\alpha}}_{\nu} f^{\alpha \nu}_{\sigma} \bar{\psi} + \left. \begin{aligned} &+ \bar{a}_x (f^{\lambda \bar{\alpha}}_{\nu} f^{\alpha \nu}_{\sigma} - f^{\lambda \bar{\alpha}}_{\sigma} f^{\alpha \nu}_{\nu}) \bar{\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (\bar{2}_3)$$

Für den Fall der bedingten Variation wäre hier noch hinzuzufügen der dem  $\mathfrak{M}_0 = \psi$  entsprechende Term

$$\mathfrak{T}_0^{\lambda, \mu} = \mathfrak{M}_0 \psi^{\lambda, \mu}, \quad (2_0)$$

während offenbar das zugehörige  $t_0^{\lambda, \mu \nu}$  Null ist.

Gestützt auf die Tabellen (1) und (2) erhalten wir schließlich  $t^{\lambda, \mu \nu}$  und  $\mathfrak{T}^{\lambda, \mu}$  als Kombinationen:

$$t^{\lambda, \mu \nu} = \sum_{i=1}^3 (A_i t_i^{\lambda, \mu \nu} + \bar{A}_i \bar{t}_i^{\lambda, \mu \nu}), \quad (3)$$

$$\mathfrak{T}^{\lambda, \mu} = A_0 \mathfrak{T}_0^{\lambda, \mu} + \sum_{i=1}^3 (A_i \mathfrak{T}_i^{\lambda, \mu} + \bar{A}_i \bar{\mathfrak{T}}_i^{\lambda, \mu}). \quad (4)$$

Es ist aber wohl zu beachten, daß die hier und in (1) und (2) auftretenden Zeiger 1, 2, 3, 0 Invarianten numerieren und demnach nicht mit Formen oder Koordinatenzeigern verwechselt werden dürfen.

Die Ausdrücke (3) und (4) wären nun also in §1 (4) einzusetzen. Zur expliziten Berechnung der Feldgleichungen müßten schließlich noch die Ableitungen der  $t^{\lambda, \mu \nu}$  ermittelt werden. Damit kämen die zweiten Ableitungen, also auch die Krümmungskomponenten ins Spiel. Für die

Zwecke der vorliegenden Arbeit benötigen wir aber die Krümmungskomponenten noch nicht. Wir können also ihre explizite Berechnung aufsparen bis zur Analyse der Gravitationsfelder.

### § 3. Schwache Felder.

Eine invariante Charakterisierung schwacher Felder erhalten wir am einfachsten durch folgende Forderung: Die Feldgrößen  $f_{ik}$  seien so klein, daß man ihre Quadrate vernachlässigen darf.

In nullter Näherung gilt daher

$$f_{i,k,l} = 0 \quad (1)$$

und es folgt

$$\psi_{i,k} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}, \quad (2)$$

wobei  $\psi_i$  ein variabler Formenvektor ist, dessen Komponenten wir als unabhängige Funktionen voraussetzen müssen, weil für die zugehörige Jakobiane gilt

$$\psi = \text{Det } [\psi_{i,k}] = \text{Det } \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} \neq 0. \quad (3)$$

Jetzt führen wir ein ausgezeichnetes Koordinatensystem ein durch den Ansatz

$$\bar{x}_i = \psi_i. \quad (4)$$

In diesem System gilt nach G § 2, (1) und (11)

$$\bar{\psi}_{i,k} = \alpha_{\lambda k} \psi_{i,\lambda} \\ \frac{\partial x_\lambda}{\partial \bar{x}_k} \psi_{i,\lambda}$$

Gestützt auf (2) und (4) folgt also

$$\psi_{i,k} = \frac{\partial x_\lambda}{\partial \bar{x}_k} \cdot \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\lambda} = \delta_{i,k}. \quad (5)$$

Wir sind somit zu folgendem Ergebnis gelangt. Zu einem schwachen Feld existiert immer ein ausgezeichnetes Koordinatensystem derart, daß in demselben die Basismatrix in nullter Näherung diagonal und folglich die zugehörige Metrik pseudoeuklidisch ist.

In diesem Koordinatensystem wollen wir jetzt arbeiten und der Bequemlichkeit halber die Querstriche fallen lassen.

In erster Näherung können wir nun ansetzen

$$\psi_{i,k} = \delta_{i,k} + q_{i,k}. \quad (6)$$

Dabei sind die  $q$  so klein, daß man ihre Quadrate vernachlässigen darf. Also gilt

$$\psi^{i,k} = \delta_{i,k} - q_{i,k} \quad (7)$$

und

$$\psi = 1 + q_{i,i}, \quad (8)$$

wobei in (8) über  $i$  summiert wird.

Also folgt

$$f_{i,k l} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_{i,k}}{\partial x_l} - \frac{\partial \varphi_{i,l}}{\partial x_k} \right). \quad (9)$$

Gestützt auf § 2 ist es nun leicht, die Feldgleichungen in erster Näherung anzugeben. Dabei wollen wir, entsprechend der quasieuklidischen Metrik, nur den Fall  $A_0 = 0$  in Betracht ziehen.

Ohne Schwierigkeit erhalten wir die Tabelle

$$t_1^{\lambda, \mu \nu} = 2a^\lambda a_\mu a_\nu f^{\mu \nu}_{\lambda}, \quad (10_1)$$

$$t_2^{\lambda, \mu \nu} = a_\mu f^{\mu \lambda, \nu} - a_\nu f^{\nu \lambda, \mu}, \quad (10_2)$$

$$t_3^{\lambda, \mu \nu} = a_\mu \delta^{\lambda, \nu} f^{\mu \varrho}_{\varrho} - a_\nu \delta^{\lambda, \mu} f^{\nu \varrho}_{\varrho}, \quad (10_3)$$

$$\bar{t}_1^{\lambda, \mu \nu} = 2a^\lambda \bar{a}_\mu \bar{a}_\nu f^{\bar{\mu} \bar{\nu}}_{\bar{\lambda}}, \quad (\overline{10}_1)$$

$$\bar{t}_2^{\lambda, \mu \nu} = 2a^\lambda \bar{a}_\mu \bar{a}_\nu \delta^{\bar{\mu}, \nu} f^{\varrho \bar{\varrho}}_{\bar{\lambda}}, \quad (\overline{10}_2)$$

$$\bar{t}_3^{\lambda, \mu \nu} = \bar{a}_\mu \delta^{\bar{\mu}, \nu} f^{\lambda \varrho}_{\varrho} + \frac{1}{2} \bar{a}_\alpha (\delta^{\lambda, \nu} f^{\alpha \bar{\alpha}, \mu} - \delta^{\lambda, \mu} f^{\alpha \bar{\alpha}, \nu}). \quad (\overline{10}_3)$$

Die Energiekomponenten § 2 (2) aber werden offenbar von zweiter Ordnung klein. Wir haben also einfach zu setzen

$$\mathfrak{T}^{\lambda, \mu} = 0. \quad (11)$$

Schließlich ist es, gestützt auf (6) und (7) sowie auf § 1 (8a), in erster Näherung erlaubt, alle oberen Indizes auf der rechten Seite der Gln. (10) herunterzuziehen. Für die korrekte Durchführung dieser Indexverschiebung hat man die im Anschluß an die Gln. (13) angegebene Vorschrift zu beachten. Wir erhalten so für die Teilkomponenten der Feldgleichungen

$$\frac{\partial t_1^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = 0 \quad (12)$$

für schwache Felder die Ausdrücke

$$\frac{\partial t_1^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = 2a_\lambda a_\mu a_\nu \frac{\partial f_{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu}, \quad (13_1)$$

$$\frac{\partial t_2^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = a_\mu \frac{\partial f_{\nu, \mu \lambda}}{\partial x_\nu} - a_\nu \frac{\partial f_{\mu, \nu \lambda}}{\partial x_\nu}, \quad (13_2)$$

$$\frac{\partial t_3^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = a_\mu \left( \frac{\partial f_{\varrho, \mu \varrho}}{\partial x_\lambda} - \delta_{\lambda, \mu} a_\nu \frac{\partial f_{\varrho, \nu \varrho}}{\partial x_\nu} \right), \quad (13_3)$$

$$\frac{\partial \bar{t}_1^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = 2a_\lambda \bar{a}_\mu \bar{a}_\nu \frac{\partial f_{\bar{\lambda}, \bar{\mu} \bar{\nu}}}{\partial x_\nu}, \quad (\overline{13}_1)$$

$$\frac{\partial \bar{t}_2^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = 2a_\lambda \bar{a}_\mu \bar{a}_\nu \frac{\partial f_{\lambda, \varrho \bar{\varrho}}}{\partial x_{\bar{\mu}}}, \quad (\overline{13}_2)$$

$$\frac{\partial \bar{t}_3^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = \bar{a}_\mu \frac{\partial f_{\varrho, \lambda \varrho}}{\partial x_{\bar{\mu}}} + \frac{1}{2} \bar{a}_\alpha a_\mu \left( \frac{\partial f_{\mu, \alpha \bar{\alpha}}}{\partial x_\lambda} - \delta_{\lambda, \mu} \frac{\partial f_{\nu, \alpha \bar{\alpha}}}{\partial x_\nu} \right). \quad (\overline{13}_3)$$

Wie schon gesagt beziehen sich die Gln. (6) bis (13) auf ein ausgezeichnetes Koordinatensystem. Von dieser Beschränkung kann man sich aber frei machen für alle diejenigen affinen Koordinatentransformationen, welche zusammen mit einer passend gewählten Formentransformation den Ansatz (4) invariant lassen. Der Ansatz (4) zeigt schon, daß man in diesem Falle jeden Formenzeiger gleich behandeln muß wie einen gegenständigen Koordinatenzeiger.

Eine elementare algebraische Analyse zeigt, daß man die genannten Erfordernisse am bequemsten erfüllt durch folgende

*Vorschrift: Man behandle jeden Formenzeiger wie einen gegenständlichen Koordinatenzeiger und beschränke die linearen Koordinatentransformationen auf LORENTZ-Transformationen.*

Wir setzen daher

$$\varphi_{i,k} = a_i \omega_{i,k}, \quad (14)$$

wo nun  $\omega_{i,k}$  einen kovarianten Koordinatentensor zweiter Stufe darstellt und erhalten aus (9)

$$f_{i,kl} = a_i h_{i,kl} \quad (15)$$

mit

$$h_{i,kl} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \omega_{i,k}}{\partial x_l} + \frac{\partial \omega_{i,l}}{\partial x_k} \right). \quad (16)$$

Die Relationen (13) gehen damit über in

$$\frac{\partial t_1^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = 2 a_\mu a_\nu \frac{\partial h_{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu}, \quad (17_1)$$

$$\frac{\partial t_2^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = a_\mu a_\nu \left( \frac{\partial h_{\nu, \mu \lambda}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial h_{\mu, \nu \lambda}}{\partial x_\nu} \right), \quad (17_2)$$

$$\frac{\partial t_3^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = a_\mu a_\nu \left( \frac{\partial h_{\nu, \mu \nu}}{\partial x_\lambda} - \delta_{\lambda, \mu} a_\nu \frac{\partial h_{\nu, \nu \nu}}{\partial x_\nu} \right), \quad (17_3)$$

$$\frac{\partial \bar{t}_1^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = 2 \bar{a}_\mu \bar{a}_\nu \frac{\partial h_{\lambda, \bar{\mu} \bar{\nu}}}{\partial x_\nu}, \quad (\bar{17}_1)$$

$$\frac{\partial \bar{t}_2^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = 2 \bar{a}_\mu \bar{a}_\nu \frac{\partial h_{\lambda, \bar{\nu} \bar{\nu}}}{\partial x_{\bar{\mu}}}, \quad (\bar{17}_2)$$

$$\frac{\partial \bar{t}_3^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = \bar{a}_\mu a_\nu \frac{\partial h_{\nu, \lambda \bar{\nu}}}{\partial x_{\bar{\mu}}} + \frac{1}{2} \bar{a}_\alpha a_\mu \left( \frac{\partial h_{\mu, \alpha \bar{\alpha}}}{\partial x_\lambda} - \delta_{\lambda, \mu} a_\nu \frac{\partial h_{\nu, \alpha \bar{\alpha}}}{\partial x_\nu} \right). \quad (\bar{17}_3)$$

Die endgültigen Feldgleichungen für schwache Felder lauten nun also

$$\frac{\partial t^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = \sum_{i=1}^3 \left( A_i \frac{\partial t_i^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} + \bar{A}_i \frac{\partial \bar{t}_i^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} \right) = 0. \quad (18)$$



Zusammen mit den aus (16) folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial h_{\lambda, \varrho \sigma}}{\partial x_{\tau}} + \frac{\partial h_{\lambda, \sigma \tau}}{\partial x_{\varrho}} + \frac{\partial h_{\lambda, \tau \varrho}}{\partial x_{\sigma}} = 0 \quad (19)$$

liegt also eine Vervielfachung der MAXWELLSchen Gleichungen für das Vakuum vor.

#### § 4. Lichtwellen.

In G § 7 haben wir die der Basismatrix  $\|\psi_{i, k}\|$  zugeordnete Metrik erklärt und darauf hingewiesen, daß diese Zuordnung nicht von vorneherein eindeutig feststeht. Wir wollen jetzt eine Entscheidung treffen, indem wir setzen

$$G_{\lambda \mu} \equiv a^{i k} \psi_{i, \lambda} \psi_{k, \mu}. \quad (1)$$

Dieser Festsetzung genügt als Spezialfall das in L I § 4 für die kosmologische Lösung gebrauchte Linienelement.

Gestützt auf die Relationen (6) und (14) des vorausgehenden Paragraphen erhalten wir daher in erster Näherung für schwache Felder

$$G_{\lambda \mu} = a_{\lambda \mu} + \omega_{\lambda, \mu} + \omega_{\mu, \lambda}. \quad (2)$$

Es scheint schwer, ja vielleicht unmöglich, aus dem metrischen Feld in invarianter Weise Lichtwellen zu gewinnen. Wir richten daher unser Augenmerk auf diejenigen schwachen Felder, deren Gravitationspotentiale nicht nur in nullter, sondern auch in erster Ordnung konstant sind:

$$\omega_{\lambda, \mu} + \omega_{\mu, \lambda} = 0. \quad (3)$$

Die weitere Entwicklung verläuft nun ein Stück weit nach klassischem Vorbild. Durch die Gln. § 3 (19) sind die Größen nur bis auf ein Gradientenfeld  $\partial \chi_{\lambda} / \partial x_{\mu}$  festgelegt. Über letzteres können wir daher noch so verfügen, daß die  $\omega_{\lambda, \mu}$  für jeden Index  $\lambda$  der LORENTZ-Konvention genügen. Dieselbe lautet in unserem Falle in erster Näherung

$$\frac{\partial \omega_{\lambda, \mu}}{\partial x_{\mu}} = a^{\mu} \frac{\partial \omega_{\lambda, \mu}}{\partial x_{\mu}} = 0,$$

und dafür dürfen wir schreiben

$$a_{\mu} \frac{\partial \omega_{\lambda, \mu}}{\partial x_{\mu}} = 0. \quad (4)$$

Schließlich benötigen wir noch den D'ALEMBERTschen Operator  $\square$ . In unserer Schreibweise lautet er

$$\square \equiv a_{\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_{\nu} \partial x_{\nu}}. \quad (5)$$

Führen wir nun die Ausdrücke § 3 (16) in die Beziehungen § 3 (17) ein und machen wir Gebrauch von den eben gewonnenen Gln. (3) und (4), so erhalten wir

$$\frac{\partial t_1^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = a_\mu \square \omega_{\lambda, \mu}, \quad (6_1)$$

$$\frac{\partial t_2^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{2} a_\mu \square \omega_{\lambda, \mu}, \quad (6_2)$$

$$\frac{\partial t_3^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad (6_3)$$

$$\frac{\partial \bar{t}_1^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = -\bar{a}_\mu \frac{\partial}{\partial x_{\bar{\mu}}} \left( \bar{a}_\nu \frac{\partial \omega_{\lambda, \bar{\nu}}}{\partial x_\nu} \right), \quad (\bar{6}_1)$$

$$\frac{\partial \bar{t}_2^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = -2 \bar{a}_\mu \frac{\partial}{\partial x_{\bar{\mu}}} \left( \bar{a}_\nu \frac{\partial \omega_{\lambda, \bar{\nu}}}{\partial x_\nu} \right), \quad (\bar{6}_2)$$

$$\frac{\partial \bar{t}_3^{\lambda, \mu \nu}}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{2} \bar{a}_\mu \frac{\partial}{\partial x_{\bar{\lambda}}} \left( a_\nu \frac{\partial \omega_{\mu, \bar{\nu}}}{\partial x_\nu} \right). \quad (\bar{6}_3)$$

Aus diesen Ausdrücken erhält man durch die vorgeschriebene lineare Kombination offenbar dann und nur dann Lichtwellen, wenn die Bedingungen

$$\bar{a}_\nu \frac{\partial \omega_{\lambda, \bar{\nu}}}{\partial x_\nu} = 0 \quad (7)$$

erfüllt sind. Da neben diese Bedingungen noch die LORENTZ-Konventionen (4) treten, sind die Möglichkeiten stärker eingeschränkt als in der MAXWELLSchen Theorie.

Zusammenfassend stellen wir also fest: Um Lichtwellen zu erhalten, müssen wir die Gleichungen

$$\square \omega_{\lambda, \mu} = 0 \quad (8)$$

unter den Nebenbedingungen (3), (4) und (7) lösen, wobei natürlich die Kombinationszahlen  $A_i$  der Bedingung

$$2A_1 + A_2 = 0 \quad (9)$$

genügen müssen.

Zur Aufstellung einer konkreten Lösung empfiehlt sich der Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \omega_{0,1} &= -\omega_{1,0} = A_1 \varphi(\chi) \\ \omega_{0,2} &= -\omega_{2,0} = A_2 \varphi(\chi) \\ \omega_{0,3} &= -\omega_{3,0} = A_3 \varphi(\chi) \\ \omega_{2,3} &= -\omega_{3,2} = B_1 \varphi(\chi) \\ \omega_{3,1} &= -\omega_{1,3} = B_2 \varphi(\chi) \\ \omega_{1,2} &= -\omega_{2,1} = B_3 \varphi(\chi) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Dabei sei  $\varphi(\chi)$  eine Schwingungsfunktion

$$\varphi''(\chi) = -\varphi(\chi) \quad (11)$$

und  $\chi$  eine Linearform der Koordinaten

$$\chi \equiv p_v x_v, \quad (12)$$

während die  $A_i$  und  $B_i$  Konstanten sind. Durch (10) ist (3) erfüllt. Infolge (12) wird (8) durch

$$a_v p_v p_v = 0. \quad (13)$$

Genüge geleistet, so daß nur noch die Diskussion der Bedingungen (4) und (7) übrig bleibt. Durch (10) erhalten sie folgende Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 &= 0 \\ A_1 p_0 + B_3 p_2 - B_2 p_3 &= 0 \\ A_2 p_0 - B_3 p_1 + B_1 p_3 &= 0 \\ A_3 p_0 + B_2 p_1 - B_1 p_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon A_1 p_0 + \eta A_3 p_2 - \eta A_2 p_3 &= 0 \\ \varepsilon A_1 p_1 - \eta B_2 p_2 - \eta B_3 p_3 &= 0 \\ -\varepsilon B_3 p_0 + \varepsilon A_2 p_1 + \eta B_1 p_2 &= 0 \\ \varepsilon B_2 p_0 + \varepsilon A_3 p_1 + \eta B_1 p_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

Eine elementare Analyse zeigt, daß man die einfachste Lösung erhält, wenn man die Bedingung  $p_2^2 + p_3^2 = 0$  zugrunde legt. Mit Rücksicht auf (13) heißt dies, daß man auszugehen hat von den Bedingungen

$$p_2 = p_3 = 0; \quad p_1 = -\zeta p_0; \quad \zeta^2 = 1. \quad (14)$$

Es folgt

$$A_1 = 0; \quad A_2 = -\zeta B_3; \quad A_3 = \zeta B_2. \quad (15)$$

Dank der Antisymmetrie (3) kann man nun die vollständige Lösung, d.h. alle  $\omega_{\lambda, \mu}$  entnehmen aus der Tafel

$$\left. \begin{aligned} \omega_{0,1} &= 0; & \omega_{2,3} &= B_1 \varphi \\ \omega_{0,2} &= -\zeta B_3 \varphi; & \omega_{3,1} &= B_2 \varphi \\ \omega_{0,3} &= \zeta B_2 \varphi; & \omega_{1,2} &= B_3 \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

wobei

$$\varphi \equiv \varphi \{p_0(x_0 - \zeta x_1)\} \quad (17)$$

die durch (11) charakterisierte Schwingungsfunktion ist.

Gestützt auf §3 (16) und (15) erhält man schließlich folgende Tafel für die Feldgrößen  $f_{i,kl}$ , wobei die Abkürzung

$$P \equiv \frac{1}{2} p_0 \varphi' \quad (18)$$

benützt wird:

$$\left. \begin{aligned} f_{0,01} &= 0; & f_{0,23} &= 0 \\ f_{0,02} &= \zeta B_3 P; & f_{0,31} &= - B_2 P \\ f_{0,03} &= -\zeta B_2 P; & f_{0,12} &= - B_3 P \end{aligned} \right\} \quad (19_0)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{1,01} &= 0; & f_{1,23} &= 0 \\ f_{1,02} &= B_3 P; & f_{1,31} &= -\zeta B_2 P \\ f_{1,03} &= - B_2 P; & f_{1,12} &= -\zeta B_3 P \end{aligned} \right\} \quad (19_1)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{2,01} &= 0; & f_{2,23} &= 0 \\ f_{2,02} &= 0; & f_{2,31} &= \zeta B_1 P \\ f_{2,03} &= B_1 P; & f_{2,12} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19_2)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{3,01} &= 0; & f_{3,23} &= 0 \\ f_{3,02} &= - B_1 P; & f_{3,31} &= 0 \\ f_{3,03} &= 0; & f_{3,12} &= \zeta B_1 P \end{aligned} \right\} \quad (19_3)$$

Es ist lehrreich, auf Grund dieser Tafel die in G § 13 (8) und (9) definierten phänomenologischen Feldstärke  $f_{\mu,\nu}$  zu berechnen. Nach den eben zitierten Gleichungen können wir sie schreiben in der Gestalt

$$F_{\mu,\nu} = k C_\lambda f_{\lambda,\mu,\nu},$$

wobei wir entsprechend den getroffenen Vereinbarungen alle Indizes tief gestellt haben.

Wenn wir noch durch

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= F_{01}, & E_2 &= F_{02}, & E_3 &= F_{03} \\ H_1 &= F_{23}, & H_2 &= F_{31}, & H_3 &= F_{12} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

die klassischen Vektoren einführen, erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= 0; & H_1 &= 0 \\ E_2 &= k P [B_3 (C_0 \zeta - C_1) - B_1 C_3]; & H_2 &= \zeta E_3 \\ E_3 &= -k P [B_2 (C_0 \zeta + C_1) - B_1 C_3]; & H_3 &= -\zeta E_2. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Der phänomenologische Strahl  $F_{\mu,\nu}$  ist also bei jeder Wahl der Konstanten  $C_\lambda$  transversal und erfüllt dadurch automatisch die Bedingungen

$$\mathfrak{E}^2 = \mathfrak{H}^2; \quad \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H} = 0; \quad [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] = -\mathfrak{E}^2 (\zeta, 0, 0). \quad (23)$$

Er stellt somit genau eine elektromagnetische Welle dar.

Die Berechnung der übrigen simultanen Lösungen zu (13), (14') und (7') ergibt zu jeder von  $(\zeta, 0, 0)$  verschiedenen Raumrichtung genau einen Strahl. Diese weiteren Lösungen müssen sich also auch ergeben.



wenn man auf die geschilderte Lösung passende LORENTZ-Transformationen ausübt.

Schließlich sei noch einmal darauf hingewiesen, daß diese Folgerungen für jede Wahl der Kombinationszahlen  $A_1, A_2$  gelten, sofern nur die Bedingung (9) erfüllt ist:  $2A_1 - A_2 = 0$ . Sie gelten also speziell auch, wenn sich auf den symmetrischen Fall beschränkt, indem man  $\varepsilon = \eta = 0$  setzt.

### § 5. Die Energiedichte.

Bekanntlich ist die Energiedichte  $T^{0,0}$  beim heutigen Stand der Dinge die wichtigste Komponente des Energietensors. Wir wollen sie daher berechnen und auf den Fall der Lichtwellen spezialisieren.

Man kann immer, d.h. also auch für starke Felder, das Koordinatensystem in einem Weltpunkt so wählen, daß in demselben gilt

$$\psi_{\lambda,\mu} = \delta_{\lambda,\mu}. \quad (1)$$

Dadurch vereinfachen sich die Komponenten des in § 2 (2) angegebenen Energietensors. Um die Vorzeichen sichtbar zu machen, sondern wir den Index 0 aus und verwenden für die übrigen Indizes lateinische Buchstaben. Es empfiehlt sich, zuerst die Teilkomponenten  $M_i, \bar{M}_i$  der Wirkungsfunktion

$$M = \sum_{i=1}^3 (A_i M_i + \bar{A}_i \bar{M}_i) \quad (2)$$

zu notieren.

$$M_1 = -2f_{0,0l}f_{0,0l} + f_{0,kl}f_{0,kl} + 2f_{i,0l}f_{i,0l} - f_{i,kl}f_{i,kl}, \quad (3_1)$$

$$M_2 = -f_{0,0l}f_{0,0l} + 2f_{0,kl}f_{l,0k} + f_{i,0l}f_{l,0i} + f_{i,kl}f_{l,ik}, \quad (3_2)$$

$$M_3 = -f_{0,0l}f_{0,0l} - 2f_{0,0l}f_{k,kl} + f_{i,0i}f_{l,0l} - f_{i,ki}f_{l,kl}. \quad (3_3)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_1 &= 2a_v(\varepsilon f_{v,01} + \eta f_{v,23})^2 - \\ &\quad - 4a_v \varepsilon \eta (f_{v,01}f_{v,23} + f_{v,02}f_{v,31} + f_{v,03}f_{v,12}), \end{aligned} \right\} \quad (3_1)$$

$$\bar{M}_2 = 4a_v(\varepsilon f_{v,01} + \eta f_{v,23})^2, \quad (3_2)$$

$$\bar{M}_3 = 2(\varepsilon f_{e,01} + \eta f_{e,23})f_{e,0e}. \quad (3_3)$$

In Verbindung mit § 2 (2) erhalten wir nun weiter die Teilkomponenten der Energiedichte  $T^{0,0}$ .

$$T_1^{0,0} = 2f_{0,0l}f_{0,0l} + f_{0,kl}f_{0,kl} - 2f_{i,0l}f_{i,0l} - f_{i,kl}f_{i,kl}, \quad (4_1)$$

$$T_2^{0,0} = f_{0,0l}f_{0,0l} - f_{i,0l}f_{l,0i} + f_{i,kl}f_{l,ik}, \quad (4_2)$$

$$T_3^{0,0} = f_{0,0l}f_{0,0l} - f_{i,0i}f_{l,0l} - f_{i,ki}f_{l,kl}, \quad (4_3)$$

$$\bar{T}_1^{0,0} = 2a_v(\varepsilon f_{v,01} + \eta f_{v,23})^2 + 4a_v(\varepsilon^2 f_{v,01}^2 - \eta^2 f_{v,23}^2), \quad (4_1)$$

$$\bar{T}_2^{0,0} = 4a_v(\varepsilon f_{v,01} + \eta f_{v,23})^2 - 8a_v \varepsilon f_{v,01}(\varepsilon f_{v,01} + \eta f_{v,23}), \quad (4_2)$$

$$\bar{T}_3^{0,0} = 4(\varepsilon f_{0,01} + \eta f_{0,23})f_{e,0e} + 2(\varepsilon f_{i,01} + \eta f_{i,23})f_{e,ie}. \quad (4_3)$$

Bei der Spezialisierung auf Lichtwellen findet nun eine erhebliche Vereinfachung statt dank der *LORENTZ-Konvention* §4 (4) und der *Strahlungsbedingung* §4 (7).

Aus der *LORENTZ-Konvention* folgt nämlich wegen der Antisymmetrie von  $\omega_{\lambda,\mu}$

$$\begin{aligned} a_\mu \frac{\partial \omega_{\lambda,\mu}}{\partial x_\mu} &= -a_\mu \left( \frac{\partial \omega_{\mu,\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \omega_{\mu,\mu}}{\partial x_\lambda} \right) \\ &= -2a_\mu h_{\mu,\lambda\mu} \\ &= -2f_{\mu,\lambda\mu} = 0, \end{aligned}$$

also

$$f_{\mu,\mu\lambda} = 0. \quad (5)$$

Die Strahlungsbedingung aber können wir wegen  $a_\lambda = \bar{a}_\lambda$  schreiben in der Gestalt

$$\begin{aligned} \bar{a}_\nu \frac{\partial \omega_{\lambda,\bar{\nu}}}{\partial x_\nu} &= \frac{1}{2} \left( \bar{a}_\nu \frac{\partial \omega_{\lambda,\bar{\nu}}}{\partial x_\nu} - \bar{a}_{\bar{\nu}} \frac{\partial \omega_{\lambda,\bar{\nu}}}{\partial x_\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \bar{a}_\nu \left( \frac{\partial \omega_{\lambda,\bar{\nu}}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \omega_{\bar{\nu},\lambda}}{\partial x_\nu} \right) \\ &= \bar{a}_\nu h_{\lambda,\bar{\nu}\nu} \\ &= \bar{a}_\nu a_\lambda f_{\lambda,\bar{\nu}\nu} = 0 \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\bar{a}_\nu f_{\lambda,\nu\bar{\nu}} = 0,$$

was ausführlich geschrieben liefert

$$\epsilon f_{\lambda,01} + \eta f_{\lambda,23} = 0. \quad (6)$$

Aus (6) ersieht man unmittelbar, daß für Lichtwellen gilt

$$\bar{T}_1^{0,0} = T_2^{0,0} = \bar{T}_3^{0,0} = 0,$$

und aus (5) folgt nach einer kleinen Rechnung  $T_3^{0,0} = 0$ .

Wir haben also nur noch die Kombination

$$T^{0,0} = A_1 T_1^{0,0} + A_2 T_2^{0,0}$$

zu berechnen.

Gestützt auf die *Tafel* §4 (19) erhält man als Resultat

$$T^{0,0} = -4(2A_1 - A_2) B_1^2 P^2$$

oder also, unter Beachtung von §4 (18) ausführlich geschrieben

$$T^{0,0} = -(2A_1 - A_2) B_1^2 \rho_0^2 \varphi'^2. \quad (7)$$

Die Energie erscheint also als *definite* Größe. Doch sind wir hier noch an unser ausgezeichnetes Koordinatensystem gebunden. Es stellt sich somit die wichtige Frage, ob das Vorzeichen der Energiedichte der

Strahlung invariant ist gegenüber den für die schwachen Felder maßgebenden Transformationen, d.h. also gegenüber den im Anschluß an §2 (13) erläuterten LORENTZ-Transformationen.

In unserer Bezeichnung ist eine lineare Transformation

$$\xi^{*,\lambda} = \alpha^{\lambda e} \xi_e \quad (8)$$

eine LORENTZ-Transformation, wenn die Spaltenrelationen

$$a_\lambda \alpha^{\lambda e} \alpha^{\lambda \sigma} = a_{e\sigma} \quad (9)$$

erfüllt sind. Diese Relationen müssen wir also beachten, wenn wir den Energietensor gemäß

$$\bar{T}^{\lambda,\mu} = \alpha_{e\lambda} \alpha^{\mu\sigma} T^{e,\sigma} \quad (10)$$

auf ein neues System  $\bar{S}$  transformieren. Speziell lautet nun unsere Frage, ob dem definiten  $T^{0,0}$  ein gleichsinnig definites

$$\bar{T}^{0,0} = \alpha_{e0} \alpha^{0\sigma} T^{e,\sigma} \quad (11)$$

entspricht.

Zur Beantwortung der Frage muß also der ganze Energietensor berechnet werden. Gestützt auf (5) und (6) findet man leicht

$$T_3^{\lambda,\mu} = \bar{T}_1^{\lambda,\mu} = \bar{T}_2^{\lambda,\mu} = \bar{T}_3^{\lambda,\mu} = 0, \quad (12)$$

so daß nur  $T_1^{\lambda,\mu}$  und  $T_2^{\lambda,\mu}$  explizite zu berechnen sind.

Die Ergebnisse können wir in folgender Weise zusammenfassen:

$$T_1^{\lambda,\mu} = -2 T_2^{\lambda,\mu}, \quad (13)$$

$$\|T_2^{\lambda,\mu}\| = Q^2 B_1^2 \begin{vmatrix} 1 & \zeta & 0 & 0 \\ -\zeta & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (14)$$

mit

$$Q \equiv p_0 \varphi'. \quad (15)$$

Die Auswertung von (11) ergibt nun tatsächlich ein zu  $T^{0,0}$  gleichsinnig definites  $\bar{T}^{0,0}$ .

Es sei noch darauf hingewiesen, daß man für diese Auswertung speziell die Gleichung

$$a_\lambda \alpha^{0\lambda} \alpha^{0\lambda} = 1 \quad (16)$$

braucht. Sie ergibt sich wie folgt: Man schließt zuerst aus (9) auf die Inversionsformel

$$\alpha^{\lambda,\mu} = a_\lambda a_\mu \alpha_{\mu\lambda} \quad (17)$$

und gewinnt hierauf aus (9) und (17) die zu (9) gehörigen Zeilenrelationen

$$a_{\lambda} \alpha^{\rho\lambda} \alpha^{\sigma\lambda} = a_{\rho} a_{\sigma} a_{\rho\sigma}. \quad (18)$$

Setzt man hier  $\rho = \sigma = 0$ , so folgt (16).

Dieses Verfahren ziehe ich dem imaginären  $x_0 = it$  vor, weil es automatisch die Vorzeichen liefert.

Es ist klar, daß diese Energiebetrachtung nur dem heuristischen Zwecke dient, den Anschluß an die MAXWELLSche Theorie sicherzustellen. Nach dem leitenden Gesichtspunkt unserer Approximation sollten ja alle quadratischen Terme vernachlässigt werden, insbesondere also auch die Komponenten des Energietensors.

### § 6. Schlußbemerkungen.

Zum Schluß will ich die zwischen den Kombinationszahlen  $A_1, \bar{A}_1$  bestehenden Relationen § 4 (11), (12), § 4 (6) und § 5 (7) noch einmal zusammenstellen. Dabei ordne ich sie nach Maßgabe des Gewichtes, das ich ihnen jetzt beimesse und überschreibe jede Relation mit dem für ihre Aufstellung maßgebenden Grund.

#### I. Positiv definite Lichtenergie:

$$A_2 - 2A_1 > 0. \quad (I)$$

#### II. Isotropie des Raumes:

$$2A_1 + A_2 + A_3 + 2\eta^2 (\bar{A}_1 + 2\bar{A}_2) = 0. \quad (II)$$

#### III. Kugelsymmetrie des Raumes:

$$2A_1 + A_2 + 2A_3 = 0; \quad \varepsilon \bar{A}_3 = 0. \quad (III a, b)$$

$$(3\eta^2 - \varepsilon^2) (\bar{A}_1 + 2\bar{A}_2) \neq 0. \quad (III c)$$

Ich halte diese Bedingungen nicht für unumstößlich. Aber sie entsprechen dem, was sich bis heute bewahrt hat so gut, daß man keine von ihnen preisgeben kann ohne zwingenden Grund. Am stärksten hypothetisch belastet scheint mir III. zu sein, die Kugelsymmetrie des Raumes.

Die wichtigste Frage, die noch offen steht, ist die, ob die antisymmetrische Matrix unvermeidlich sei, ob also zum mindesten  $\eta \neq 0$  zugelassen werden müsse.

Im symmetrischen Falle gilt  $\varepsilon = \eta = 0$  oder, was praktisch auf dasselbe hinauskommt,  $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ . Dann aber gehen (II) und (III a, b) über in

$$2A_1 + A_2 + A_3 = 0, \quad (II')$$

$$2A_1 + A_2 + 2A_3 = 0, \quad (III')$$



während nach L I, §4 (5) und (6) die Bedingung (IIIc) durch

$$2A_1 + A_2 + 3A_3 \neq 0 \quad (\text{III}'c)$$

ersetzt werden sollte, was nach (II') und (III') nicht mehr möglich ist.

Sicher ist es, daß man (III') preisgeben kann, wenn man sich nicht scheut, einen Torusraum einzuführen, d. h. also einen Kubus, in dem je zwei gegenüberliegende Wände identifiziert werden müssen. In einem derartigen Raum existieren nämlich dieselben kosmologischen Lösungen, welche ich in L I angegeben habe.

Die Vereinfachungen im symmetrischen Falle sind so erheblich, daß ich es für zweckmäßig erachte, denselben vorderhand als Arbeitshypothese einzuführen.

Insbesondere werde ich in der nächsten Mitteilung zeigen, daß im symmetrischen Falle neben den hier entwickelten Gleichungen für schwache Felder die EINSTEINSCHEN Gravitationsgleichungen für beliebige Felder streng gültig sind.

### Nachtrag zur „linearen Feldtheorie II“.

Im symmetrischen Falle lassen sich die Differentialgleichungen für schwache Felder, also die Differentialgleichungen §3 (17<sub>1</sub>) bis (17<sub>3</sub>) und (18) mit  $\bar{A}_1 = \bar{A}_2 = \bar{A}_3 = 0$  ohne Schwierigkeit vollständig lösen und liefern folgende Ergebnisse:

1. Die in §4 beschriebenen *elektromagnetischen Wellen* gemäß

$$\omega_{\lambda, \mu} + \omega_{\mu, \lambda} = 0. \quad (1)$$

2. Reine *Gravitationswellen* gemäß

$$\omega_{\lambda, \mu} - \omega_{\mu, \lambda} = 0. \quad (2)$$

Sie breiten sich ebenfalls mit Lichtgeschwindigkeit aus. Die ihnen zu geordneten Feldgrößen  $f_{i,kl}$  sind sämtlich Null. Also ist auch der zu gehörige Energietensor für jede Wahl der Kombinationszahlen  $A_1, A_2, A_3$  gleich Null. Diesen Gravitationswellen kann daher zum mindesten bei Beschränkung auf schwache Felder keine physikalische Realität zugeschrieben werden.

3. Zwei Typen von *Materiewellen* gemäß

$$\omega_{\lambda, \mu}^2 - \omega_{\mu, \lambda}^2 \neq 0. \quad (3)$$

Der eine Typus kann durch eine geeignete LORENTZ-Transformation in eine stehende Welle verwandelt werden und stellt demnach eine DE BROGLIE-Welle dar. Der andere Typus geht aus einer DE BROGLIE-Welle dadurch hervor, daß man in der letzteren die Zeit  $x_0$  mit einer Raumkoordinate vertauscht.

Die diesen Materiewellen zugeordneten Feldgrößen sind nicht alle gleich Null. Trotzdem verschwinden alle Komponenten des zugehörigen Energietensors infolge der Isotropiebedingung

$$2A_1 + A_2 + A_3 = 0. \quad (4)$$

Hier haben wir also ein erstes Symptom dafür, daß man vielleicht auch die Isotropie des Raumes preisgeben muß.

*Bern*, Mathematisches Seminar der Universität.

# Zur Theorie der Leitfähigkeit und Viskosität von Salzschnelzen.

Von  
W. OLDEKOP.

Mit 4 Figuren im Text.

(Eingegangen am 7. November 1954.)

In Anlehnung an die molekular-statistische Theorie der Flüssigkeiten von GREEN wird ein einfaches Modell der Salzschnelzen, insbesondere der Alkalihalogenidschnelzen entwickelt, welches größenordnungsmaßig die experimentellen Befunde richtig beschreibt.

## 1. Einleitung und Problemstellung.

Während die an der Elektrizitätsleitung beteiligten physikalischen Vorgänge bei den kristallinen Salzen und bei den wäßrigen Salzlösungen weitgehend untersucht sind, besteht hinsichtlich der beim Stromtransport und der inneren Reibung sich abspielenden molekularen Vorgänge in Salzschnelzen wohl noch keine endgültige Klarheit. Die bekannten Vorstellungen über Platzwechselvorgänge im Rahmen der „Löchertheorie“<sup>1</sup> haben zwar bei vielen Flüssigkeiten ein qualitatives Verständnis des Zähigkeitsverhaltens ermöglicht, doch läßt die relativ schwache Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit von Salzschnelzen es fraglich erscheinen, ob die zu einer exponentiellen Temperaturabhängigkeit führenden Platzwechselvorstellungen einen geeigneten Ausgangspunkt für die theoretische Behandlung dieser Substanzen darstellen.

In der vorliegenden Arbeit soll eine von molekularen Verteilungsfunktionen ausgehende statistische Beschreibung der Vorgänge in den Salzschnelzen versucht werden, die sich in ihren Grundgedanken an die in den letzten Jahren insbesondere von BORN und GREEN<sup>2</sup> entwickelte allgemeine statistische Theorie der Flüssigkeiten anlehnt und in gewissem Sinn eine zur Platzwechseltheorie entgegengesetzte Ausgangsnäherung darstellt. Wenn es sich hierbei auch nur um einen ersten Versuch handelt und die makroskopische Berechnungsweise der atomaren Vorgänge stellenweise recht gewagt sein mag, so soll die qualitativ und größenordnungsmaßig richtige Wiedergabe der experimentellen Ergebnisse doch nahelegen, daß die im folgenden entwickelte Auffassung einen möglichen Ausgangspunkt für die Behandlung der Salzschnelzen darstellt. Die vorliegende Arbeit beschränkt

<sup>1</sup> Vgl. etwa EUCKEN, A.: Lehrbuch der chemischen Physik.

<sup>2</sup> Vgl. GREEN, H. S.: The molecular Theory of fluids. Amsterdam 1952.

sich auf die Alkalihalogenide, doch dürfte eine Übertragung der Grundgedanken auch auf kompliziertere Fälle möglich sein:

Wir fassen das geschmolzene Alkalihalogenid als eine Ansammlung einwertig positiv und negativ geladener starrer Ionen bestimmten Durchmessers auf, die durch COULOMB-Kräfte miteinander in Wechselwirkung stehen. Außer den COULOMB-Kräften wirken auf die Einzelionen noch elastische Stoßkräfte bei Zusammenstoßen mit Nachbarionen. Derartige Stoßkräfte spielen in Gasen, wo der mittlere Teilchenabstand groß gegen die Reichweite der intermolekularen Kräfte ist, eine wichtige Rolle. In Flüssigkeiten dagegen, wo sich jedes Teilchen dauernd im Kraftfeld seiner Nachbarn befindet, sind es vor allem die ständig wirkenden intermolekularen Kräfte (in unserem Falle die COULOMB-Kräfte), die das makroskopische Verhalten der Substanz bestimmen. Wir wollen im folgenden die Stoßkräfte ganz vernachlässigen und nur die COULOMB-Kräfte zwischen den Einzelionen berücksichtigen. Die Ermittlung der Leitfähigkeit und Zähigkeit wird dann auf Grund folgender Überlegungen durchgeführt.

Jedes Ion verdrängt aus seiner Umgebung die gleichgeladenen Ionen und zieht die entgegengesetzt geladenen Ionen an, so daß es im statistischen Mittel von einer Raumladungswolke umgeben ist, die genau so wie bei der DEBYE-HÜCKEL'schen Theorie der wässrigen Elektrolyte aus POISSON-Gleichung und BOLTZMANN-Verteilung berechnet wird. Bei kugelsymmetrischer Raumladungswolke wirkt auf das betrachtete Ion keine resultierende Kraft. Wird dagegen das Ion durch ein äußeres Feld bewegt, so bleibt die Raumladungswolke wegen der zu ihrem Aufbau bzw. Abbau erforderlichen Relaxationszeit hinter dem Ion zurück und übt eine zur Geschwindigkeit proportionale Bremskraft aus, die bei gegebenem Feld die Wanderungsgeschwindigkeiten des Ions bestimmt. Aus

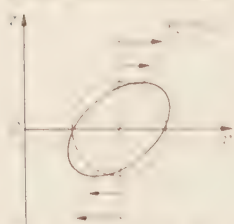


Fig. 4. Deformation einer kugelsymmetrischen Raumladungswolke durch ein Geschwindigkeitsfeld  $v_x = \text{const.}$

den Wanderungsgeschwindigkeiten erhält man die Leitfähigkeit. Der wesentliche Unterschied gegenüber ähnlichen Betrachtungen bei der DEBYE-HÜCKEL'schen Theorie der wässrigen Elektrolyte wird in der hier anders vorzunehmenden Ermittlung der Relaxationszeiten liegen.

Zur Bestimmung der Zähigkeit wird ein makroskopisches Geschwindigkeitsfeld  $v_x = \text{const.}$  (vgl. Fig. 4) betrachtet. Die Raumladungswolke eines in der Ebene  $z=0$  befindlichen Ions wird dann in der skizzierten Weise deformiert werden. Die im oberen Halbraum ( $z > 0$ ) befindlichen Ionen üben wegen der asymmetrischen Ladungsverteilung um das Zentralion auf dieses eine Kraft in der x-Richtung aus. Summiert man die Kraftwirkungen, die von den oberhalb der z-Ebene befindlichen Ionen auf die unterhalb der



z-Ebene befindlichen Ionen ausgeübt werden, so erhält man die zum Geschwindigkeitsgefälle gehörige Reibungsspannung. Aus der Reibungsspannung ergibt sich die Zähigkeit.

Für die quantitative Durchführung dieser Überlegungen müssen die Größe der Raumladungswolke und ihre Deformation bei den entsprechenden Geschwindigkeitsfeldern sowie die Relaxationszeiten ermittelt werden, was in den folgenden Abschnitten getan wird. Im letzten Abschnitt werden dann die Ergebnisse der Theorie mit den experimentellen Befunden verglichen.

## 2. Die das Einzelion umgebende Raumladungswolke und die daherrührenden Kraftwirkungen.

Bezeichnen wir mit  $n_j^{(i)}$  die Teilchendichte der Ionenart  $j$  in der Umgebung eines Zentralions der Sorte  $i$ , so ist

$$n_j^{(i)} = \bar{n} \cdot e^{-\frac{q_j \varphi^{(i)}}{kT}}, \quad (1)$$

wobei  $\bar{n}$  die (bei Alkalihalogeniden für beide Ionenarten gleiche) mittlere Teilchendichte,  $q_j$  die Ladung des Ions  $j$  und  $\varphi^{(i)}$  das elektrostatische Potential in der Umgebung des herausgegriffenen  $i$ -Ions ist. ( $k$  = BOLTZMANN-Konstante;  $T$  = Abs. Temperatur.) Wegen des endlichen Ionen-durchmessers ist die Gültigkeit der BOLTZMANN-Formel hier nicht selbstverständlich, weil starke Ionenanhäufungen nicht vorkommen können; doch wird sich später zeigen, daß  $\frac{q_j \varphi^{(i)}}{kT}$  nirgends wesentlich größer als 1 ist, so daß keine schwerwiegenden Überschreitungen der aus den Ionenradien sich ergebenden Maximaldichte zu befürchten sind<sup>1</sup>. Wie bei DEBYE-HÜCKEL soll auch hier die Exponentialfunktion entwickelt werden; man erhält dann für die Ladungsdichte  $\varrho^{(i)}$  in der Umgebung des  $i$ -Ions:

$$\varrho^{(i)} = \sum_j q_j n_j^{(i)} = - \sum_j \frac{q_j^2 \bar{n}}{kT} \varphi^{(i)}, \quad (2)$$

da  $\sum_j q_j \bar{n}$  offenbar = 0.

Aus der Poisson-Gleichung  $\Delta \varphi = \frac{4\pi}{\epsilon} \varrho^{(i)}$  folgt somit im kugelsymmetrischen Fall:

$$\frac{\partial^2 (r \varphi^{(i)})}{\partial r^2} = \kappa^2 \cdot r \varphi^{(i)} \quad (3)$$

mit

$$\kappa^2 = \frac{4\pi}{\epsilon} \sum_{j=1,2} \frac{q_j^2 \bar{n}}{kT} = \frac{8\pi}{\epsilon} \frac{e_0^2 \bar{n}}{kT}, \quad (4)$$

<sup>1</sup> Für genauere Betrachtungen muß man die von WICKER und EISEN [Z. Elektrochem. **56**, 551 (1952)] hergeleitete Formel verwenden.

da hier  $|q_1| = |q_2| = \text{Elementarladung } e_0$ ,  $\epsilon$  ist die Dielektrizitätskonstante.

Die Ionen der Art  $j$  können sich dem Zentralion  $i$  nur bis auf die Entfernung  $a_j - a_i$  nähern, wenn  $a_i$  die Ionenradien sind. Da die Ionen entgegengesetzten Vorzeichens aber den größeren Einfluß ausüben werden, dürfte es gerechtfertigt sein, für beide Ionenarten mit dem gleichen Mindestabstand  $a = a_1 = a_2$  zu rechnen. Die Gl. (3) ist dann zu integrieren mit den Randbedingungen

$$\varphi^{(i)} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad r \rightarrow \infty; \quad \left( \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial r} \right)_{r=a} = - \frac{q_i}{\epsilon a^2}.$$

Die Lösung lautet:

$$\varphi^{(i)} = \frac{q_i}{\epsilon(1 + \kappa a)} \frac{1}{r} \cdot e^{-\kappa(r-a)}. \quad (5)$$

Die Ladungsdichten  $q_j^{(i)} = q \cdot n_j^{(i)}$  erhält man aus der für  $r = a$  gültigen Beziehung

$$q_j^{(i)} = q \cdot \bar{n} = \frac{q_j^2 \bar{n}}{kT} \varphi^{(i)} \quad (6)$$

die aus (4) nach Entwicklung der  $\epsilon$ -Funktion folgt.

Für geschmolzenes NaCl ist  $\bar{n} \approx 1,5 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ ,  $a \approx 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ ,  $\epsilon \approx 2$ . (Wegen der Zahlenwerte vgl. Abschnitt 4.) Bei  $T = 1000^\circ \text{ K}$ , folgt dann<sup>1</sup>:

$$\frac{1}{\kappa} \approx 0,18 \cdot 10^{-8} \text{ cm}; \quad q \cdot \varphi^{(i)}(a) \approx 1,9.$$

Letzteres zeigt, daß die Entwicklung der  $\epsilon$ -Funktion in (4) zwar genau genommen nicht gerechtfertigt war, doch dürften die Fehler wegen des raschen Abfalls von  $q$  bei größeren  $r$  Werten nicht sehr wesentlich sein, so daß wir auf genauere Betrachtungen verzichten wollen. Da mit  $\varphi \sim e^{-\kappa(r-a)}$  nach (2) auch  $q \sim e^{-\kappa(r-a)}$  gilt und  $1/\kappa \ll a$  ist, sind die Raumladungen praktisch auf eine dünne Kugelschale der mittleren Dicke  $1/\kappa$  begrenzt, so daß wir statt (5) auch schreiben können:

$$\varphi^{(i)}(r) = \frac{q_i}{\epsilon \kappa a} \frac{1}{r} \cdot e^{-\kappa(r-a)}. \quad (5a)$$

Die im Gegensatz zu den wässrigen Elektrolytlösungen hier sehr geringe Ausdehnung des Raumladungsgebiets bedingt den wesentlichen Unterschied in der späteren Ermittlung der Relaxationszeiten gegenüber der DEBYE HÜCKEL Theorie.

Wir untersuchen jetzt die Deformation der Raumladungswolke bei Relativbewegungen von Zentralion und Umgebung. Es sei wieder  $q^{(i)}$

<sup>1</sup> Die hier auftretenden Größen sind natürlich nur als statistische Mittelwerte aufzufassen. Die Ladungsverteilung um ein spezielles Ion wird im Einzelfall ganz anders aussehen.

die Ladungsdichte der  $j$ -Ionen in der Umgebung eines  $i$ -Ions. Da es nur auf Relativbewegungen ankommt, denken wir uns das Zentralion ruhend bei  $r = 0$  und die  $j$ -Ionen mit der Relativgeschwindigkeit  $v_j(r)$  bewegt. Betrachten wir den festen Ort  $r$ , so wird sich dort im stationären Falle die Ladungsdichte nicht ändern:  $\left( \frac{\partial \varrho_j^{(i)}}{\partial t} \right)_{r = \text{const}} = 0$ . Bewegen wir uns dagegen mit den  $j$ -Ionen mit, so wird in jedem Augenblick die Ladungsdichte  $\varrho_j^{(i)}$  bestrebt sein, den oben ermittelten kugelsymmetrischen „Sollwert“  $\bar{\varrho}_j^{(i)}$  anzunehmen, was aber nur mit der Relaxationszeit  $\tau_j^{(i)}$  vor sich geht. Für den totalen Differentialquotienten  $\left[ \frac{d\varrho_j^{(i)}}{dt} \right]$  (mitbewegt) schreiben wir daher ähnlich wie bei den analogen Betrachtungen in der Elektronentheorie der Metalle:

$$\frac{d\varrho_j^{(i)}}{dt} \equiv \frac{\partial \varrho_j^{(i)}}{\partial t} + \frac{\partial \varrho_j^{(i)}}{\partial x} \cdot v_j = -\frac{\bar{\varrho}_j^{(i)} - \varrho_j^{(i)}}{\tau_j^{(i)}} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \varrho_j^{(i)}}{\partial t} = 0.$$

( $v_j$  habe nur eine  $x$ -Komponente.) Daraus folgt:

$$\varrho_j^{(i)} = \bar{\varrho}_j^{(i)} - \tau_j^{(i)} v_j \cdot \frac{\partial \bar{\varrho}_j^{(i)}}{\partial x}, \quad (7)$$

wobei wir noch im Korrekturglied  $\varrho_j^{(i)}$  durch die ungestörte Lösung  $\bar{\varrho}_j^{(i)}$  ersetzt haben, was bei Beschränkung auf lineare Glieder in  $v_j$  möglich ist.

Zur Berechnung der Ionenbeweglichkeit denken wir uns ein Ion herausgegriffen und durch eine äußere Kraft  $K_a$  mit der mittleren Geschwindigkeit  $v$  gegenüber seiner Umgebung bewegt. Statt dessen können wir natürlich auch, wie bei der Herleitung von (7), das Zentralion festhalten und seine Umgebung mit der Geschwindigkeit  $-v$  bewegen<sup>1</sup>. Auf das Zentralion wirkt dann die durch die COULOMB-Kräfte bewirkte „Bremskraft“:

$$K_B^{(i)} = - \sum_{j=1,2} \int \frac{q_i \varrho_j^{(i)}}{\varepsilon r^3} \cdot x \, d\mathbf{r} = - \sum_{j=1,2} \frac{v \cdot \tau_j^{(i)}}{\varepsilon} q_i \int \frac{\partial \bar{\varrho}_j^{(i)}}{\partial x} \cdot \frac{x}{r^3} \, d\mathbf{r},$$

wobei  $d\mathbf{r} = dx \, dv \, dz$  ist. Das in (7) auftretende kugelsymmetrische Glied  $\bar{\varrho}_j^{(i)}$  liefert offenbar keinen Beitrag zur Bremskraft. Bei Einführung von Polarkoordinaten läßt sich das Integral sofort auswerten und man erhält wegen (6) und (5a):

$$K_B^{(i)} = - \sum_j \frac{v \tau_j^{(i)}}{\varepsilon} q_i \frac{4\pi}{\varepsilon} (\bar{\varrho}_j^{(i)}(\infty) - \bar{\varrho}_j^{(i)}(a)) = - \sum_j \frac{4\pi}{3} v \cdot \frac{\tau_j^{(i)}}{\varepsilon} \cdot \frac{q_i^2 q_j^2 \bar{n}}{\varepsilon \kappa a^2 k T}.$$

<sup>1</sup> Auf Komplikationen, die sich aus der verschiedenartigen Bewegung der beiden Ionenarten im elektrischen Feld ergeben, soll hier nicht eingegangen werden.

Im stationären Falle muß die äußere Kraft  $K_a = K_b$  sein. Für die Beweglichkeit  $b_i$  des  $i$ -Ions, definiert durch die Beziehung  $v_i = b_i \cdot K_i$ , folgt somit:

$$b_i = \left[ \frac{4\pi}{3} \cdot \sum_{j=1,2} \tau_j \cdot \frac{f_j^2 q_j^2 \bar{v}}{z^2 \times 10^2 i T} \right]^{-1}. \quad (8)$$

Die Leitfähigkeit  $\sigma$  errechnet sich dann aus den Beweglichkeiten zu

$$\sigma = \sum_{i=1,2} q_i^2 \bar{n} b_i, \quad (9)$$

denn die Stromdichte  $j$  ist offenbar gegeben durch

$$j = \sum_i n_i q_i v_i = \sum_i \bar{n} q_i b_i q_i \mathcal{E} = \sigma \cdot \mathcal{E}.$$

Da  $\kappa$  nach (4) durch die atomaren und makroskopischen Materialkonstanten ausgedrückt ist, gehen in obigen Gleichungen nur noch die Relaxationszeiten als zunächst unbekannte Größen ein.

Zur Bestimmung der Zähigkeit muß man bei einem Geschwindigkeitsfeld  $v_x = \text{const} \cdot z = \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_0 \cdot z$  (vgl. Fig. 1 und 2) die Kraftwirkungen berechnen, die von den oberhalb der  $z=0$ -Ebene befindlichen Ionen auf die unterhalb der  $z=0$ -Ebene befindlichen Ionen ausgeübt werden. Dazu greifen wir ein Ion der Sorte  $i$  heraus, das sich gemäß Fig. 2 im Abstand  $\xi$  von der Ebene  $z=0$  befindet. Die auf das Ion in der  $x$ -Richtung wirkende Kraft ist gegeben durch



Fig. 2. Skizze zur Berechnung der Kraftwirkungen auf ein Ion im Abstand  $\xi$  von der Ebene  $z=0$ .

$$K_i = - \sum_{j=1,2} \int_{z>0} \frac{q_i q_j^{(j)}}{\epsilon r^3} x dr,$$

wobei die Integration über den Halbraum  $z > 0$  zu erstrecken ist, da nur die dort befindlichen Ladungen für die Berechnung der Relaxationsspannung heranzuziehen sind. Für  $q_j^{(j)}$  folgt aus (7) mit der Relativgeschwindigkeit  $v = \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 \cdot (z = z)$ , wenn wir noch  $z = z = z'$  setzen und Polarkoordinaten  $x = r \cdot \cos \vartheta$ ;  $z' = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi$  einführen:

$$q_j^{(j)} = q_j^{(i)} - \tau_j^{(i)} \cdot \frac{\partial q_j^{(i)}}{\partial r} \cos \vartheta \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 \cdot r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi.$$

Also wird

$$K_i = \sum_{j=1,2} q_i \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 \tau_j^{(i)} \cdot \int \frac{\partial q_j^{(i)}}{\partial r} r \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \cos \varphi dr d\vartheta d\varphi.$$



Die  $\varphi$ -Integration gibt den Faktor:  $2 \cdot \frac{r^2 \sin^2 \vartheta}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\zeta^2}{\zeta^2}$ . Also erhält man für obenstehendes Integral nach der Substitution  $\cos \vartheta = u$  den Ausdruck

$$2 \int_{u^2 < 1 - \frac{r^2}{\zeta^2}} \frac{\partial \hat{Q}_j^{(i)}}{\partial r} u^2 \sqrt{r^2 - \zeta^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{r^2 - \zeta^2}} u^2 du dr \\ = 4 \int_{0 \leq r \leq 1} \frac{\partial \hat{Q}_j^{(i)}}{\partial r} r \cdot \left(1 - \frac{\zeta^2}{r^2}\right)^2 \cdot r^2 \cdot \sqrt{1 - t^2} dr dt.$$

Hier gibt die  $t$ -Integration den Faktor  $\pi/6$ . Bei der übriggebliebenen  $r$ -Integration, die wegen des Mindestabstandes  $a$  der Ionen von  $a$  bis  $\infty$  zu erstrecken ist, kann man wegen  $\frac{\partial \hat{Q}_j^{(i)}}{\partial r} \sim e^{-\kappa r}$  mit  $\frac{1}{\kappa} \ll a$  die übrigen  $r$ -abhängigen Größen an der Stelle  $r = a$  vor das Integral ziehen und erhält dann wegen (6) und (5a) für  $K_i(\zeta)$  den Wert

$$K_i(\zeta) = \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 \sum_{j=1,2} \frac{q_i^2 q_j^2 \bar{n}}{\epsilon^2 \kappa a k T} \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{\zeta^2}{a^2}\right)^2.$$

Aus diesen Einzelkräften erhält man die Reibungsspannung, wenn man obigen Ausdruck über alle Ionen, die sich unterhalb der Flächeneinheit befinden, summiert bzw. integriert. Nach Division durch  $(\partial v / \partial z)_0$  folgt dann für die Zähigkeit:

$$\eta = \frac{1}{\epsilon \kappa} \sum_{i=1,2} \int K_i(\zeta) d\zeta \cdot \bar{n}.$$

Die von 0 bis  $a$  zu erstreckende  $\zeta$ -Integration gibt den Faktor  $\frac{8}{15}a$ , so daß man schließlich für die Zähigkeit  $\eta$  den Wert

$$\eta = \sum_{i=1,2} \frac{2\pi}{15} \bar{n} \cdot \frac{q_i^2 q_j^2 \bar{n}}{\epsilon^2 \kappa k T} \tau_j^{(i)} \quad (10)$$

erhält.

Damit ist die Berechnung von Leitfähigkeit und Zähigkeit auf die Ermittlung der Relaxationszeiten zurückgeführt.

### 3. Berechnung der Relaxationszeiten.

Ein ruhendes Ion ist im statistisch-thermischen Gleichgewichtszustand von der im vorigen Abschnitt berechneten Raumladungswolke umgeben, deren Einstellung (bzw. Verschwinden bei Entfernung des Zentralions) aber nicht momentan, sondern mit einer gewissen Relaxationszeit erfolgt. Bei den wäßrigen Lösungen ist die Relaxationszeit im wesentlichen durch Diffusionsvorgänge bestimmt; denn denkt man sich das Zentralion plötzlich entladen, so werden sich die Raumladungen auf Grund der thermischen Diffusion der beteiligten Ionen etwa in derjenigen

Zeit verlaufen, welche die Ionen zur Zurücklegung einer Strecke von der Größe des Raumladungsgebietes brauchen. Diffusionsvorgänge können aber nur wirksam werden, wenn die Reichweite des Raumladungsgebietes größer ist, als die mittlere freie Weglänge der Ionen. In unserem Falle erfolgt der Abfall der Raumladungen auf einer Strecke  $1\lambda$ , für die bei NaCl ein Wert von  $0,18 \cdot 10^{-8}$  cm gefunden wurde. Da diese Größe natürlich nur als statistischer Mittelwert aufzufassen ist, stellt ihre Kleinheit keine physikalische Unmöglichkeit dar; von Diffusionsvorgängen kann auf solchen Strecken aber offenbar nicht mehr die Rede sein. An die Stelle der Diffusionsgeschwindigkeit tritt daher hier die mittlere thermische Geschwindigkeit der Einzelionen. Diese ist hier wie beim idealen Gas durch die BOLTZMANN-Verteilung gegeben, da in der HAMILTON-Funktion Raum- und Impulskoordinaten separiert werden können. Das Raumladungsgebiet um ein Zentralion  $i$  kann man sich nach dem früher Gesagten als eine dünne Kugelschale der Dicke  $1\lambda$  vorstellen, die das Zentralion im Abstand  $x = 1\lambda$  umgibt. Im Gleichgewichtsfall treten pro Flächeneinheit und sec  $\bar{n} \cdot u$  Ionen der Sorte  $j$  von außen in die Raumladungszone ein, wenn  $u$  die mittlere thermische Geschwindigkeit der  $j$ -Ionen in der  $x$ -Richtung bedeutet. Diese Beziehung gilt allerdings nur dann, wenn die Ionen beim Eintritt in das Raumladungsgebiet keine merkliche Potentialschwelle zu überwinden haben. Da wir aber stets  $\frac{q_i q_j}{kT}$  als klein gegen 1 vorausgesetzt haben, was im überwiegenden Teil des Raumladungsgebiets auch der Fall ist, können wir vom Einfluß des Potentialverlaufs absehen. Die gleiche Anzahl von Ionen verläßt das Raumladungsgebiet in der umgekehrten Richtung. Denkt man sich jetzt die Dichte der  $j$ -Ionen im Raumladungsgebiet irgendwie um den Betrag  $\delta n_j$  über den Gleichgewichtswert hinaus erhöht, dann verlassen pro sec und Flächeneinheit  $\bar{n}u + \delta n_j u_j$  Ionen das Raumladungsgebiet, so daß ein resultierender Ionenstrom  $\delta n_j \cdot u_j$  übrig bleibt. Um diesen Betrag nimmt der Ionenüberschuß  $\delta n_j \cdot \frac{1}{\lambda}$  (pro Flächeneinheit der Kugelschale) ab, so daß aus

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \delta n_j}{\partial t} = -u_j \delta n_j, \quad \delta n_j \sim e^{-\kappa u_j \cdot t}$$

eine Relaxationszeit

$$\tau_j = \frac{1}{\kappa u_j}$$

für die  $j$ -Ionen folgt. Von der Art des Zentralions hängt die Relaxationszeit nicht ab. Setzt man für  $u_j$  den aus der BOLTZMANN-Verteilung sich ergebenden Wert ein, so erhält man:

$$\tau_j = \frac{1}{\kappa} \left| \frac{2\pi}{kT} \right| m_j = \frac{1}{2} \left| \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right| \frac{m_j}{\kappa}, \quad (11)$$

wobei  $m_j$  die Masse des  $j$ -Ions ist.

Einsetzen dieses Ausdrucks in (8), (9) und (10) gibt schließlich bei Berücksichtigung von (4) mit  $q_1 = q_2 =$  Elementarladung  $e_0$ :

$$\text{Leitfähigkeit } \sigma = \frac{12\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \bar{n} a^2 \sqrt{\frac{kT}{m_1 + m_2}}, \quad (12)$$

$$\text{Zähigkeit } \eta = \frac{\sqrt{2\pi}}{30} a \bar{n} \frac{e^2}{\varepsilon a} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{kT}}. \quad (13)$$

$a = r_1 + r_2 =$  Summe der beiden Ionenradien.

Damit sind  $\sigma$  und  $\eta$  durch atomistische und makroskopische Konstanten ausgedrückt, die anderweitig bekannt sind, so daß ein Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen ausgeführt werden kann.

#### 4. Der Vergleich mit den Experimenten.

Wir beschränken uns im folgenden auf die Alkalichloride, da hierüber die meisten Messungen vorliegen und sich bei den anderen Alkalihalogeniden ähnliche Verhältnisse ergeben. In der Tabelle 1 stehen in der ersten Spalte die aus dem Tabellenwerk von LANDOLT-BÖRNSTEIN entnommenen Dichten  $s$  der Alkalichloride kurz oberhalb ihres Schmelzpunktes. (Die Temperaturabhängigkeit der Dichte wird in Anbetracht des relativ groben Modells im folgenden nicht berücksichtigt.) In der zweiten Spalte stehen die aus der Dichte  $s$  berechneten mittleren Iondichten  $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = \bar{n}$ . Die dritte Spalte gibt die Summe  $a$  der Ionenradien nach GOLDSCHMIDT<sup>1</sup>.

Tabelle 1.

	$s$ in g cm <sup>-3</sup>	$\bar{n}$ in cm <sup>-3</sup>	$a$ in Å	$\alpha_1 + \alpha_2$ in cm <sup>-3</sup>	$\varepsilon$
LiCl . . .	1,5	$2,1 \cdot 10^{22}$	2,59	$3,6 \cdot 10^{-24}$	1,9
NaCl . . .	1,5	$1,5 \cdot 10^{22}$	2,79	$3,7 \cdot 10^{-24}$	1,7
KCl . . .	1,5	$1,2 \cdot 10^{22}$	3,14	$4,4 \cdot 10^{-24}$	1,7
RbCl . . .	2,1	$1,0 \cdot 10^{22}$	3,30	$5,1 \cdot 10^{-24}$	1,6
CsCl . . .	2,8	$1,0 \cdot 10^{22}$	3,46	$6,1 \cdot 10^{-24}$	1,7

Die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  wurde aus den Polarisierbarkeiten  $\alpha$  der Einzelionen nach der Beziehung  $\varepsilon = 1 + 4\pi \bar{n} (\alpha_1 + \alpha_2)$  berechnet. In der vierten Spalte wurden die  $\alpha$ -Werte von FAJANS und JOOS verwendet<sup>2</sup>. In der letzten Spalte steht die daraus berechnete DK.

In Fig. 3 sind die nach Gl. (12) mit obigen Zahlenwerten berechneten Leitfähigkeiten der Alkalichloride aufgetragen. Die gestrichelten experimentellen Kurven sind dem Taschenbuch für Chemiker und Physiker

<sup>1</sup> Nach MOTT u. GURNEY: *Electronic Processes in Ionic crystals*. Oxford University Press.

<sup>2</sup> FAJANS, K., u. G. JOOS: *Z. Physik* **23**, 1 (1924).

von D'ANS-LAX entnommen<sup>1</sup>. In Fig. 4 ist die nach (13) berechnete Zähigkeit von NaCl aufgetragen; die Kreuze geben Meßpunkte nach D'ANS-LAX wieder. Meßwerte der übrigen Alkalichloride waren dem Verfasser nicht bekannt.

Die Darstellungen zeigen, daß die experimentellen Daten größenordnungsmäßig und in ihrer Abhängigkeit von der Zusammensetzung der Salze durch die Theorie befriedigend beschrieben werden, was in ähnlicher Weise auch für die übrigen Alkalihalogenide gilt. Berücksichtigt man die Temperaturabhängigkeit der Dichte, was hier nicht getan wurde, so fällt bei den Leitfähigkeiten der Anstieg mit der Temperatur

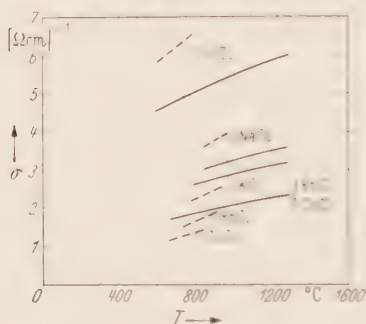


Fig. 3. Leitfähigkeit der Alkalichloride, ..... Experimentelle Werte; — berechnet nach Gl. (12).

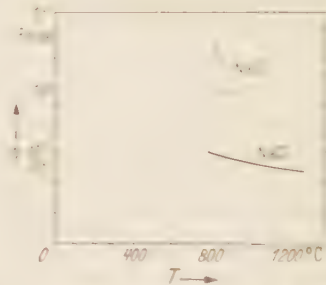


Fig. 4. Zähigkeit von NaCl, x x x Meßpunkte nach D'ANS-LAX; — berechnet nach Gl. (13).

allerdings zu schwach aus, wogegen bei der Zähigkeit ein stärkerer Abfall mit der Temperatur erhalten wird. Nach provisorischen Untersuchungen wird aber in beiden Fällen eine stärkere Temperaturabhängigkeit im richtigen Sinne erzielt, wenn man die hier vorgenommene und nicht

ganz gerechtfertigte Entwicklung der Exponentialfunktion  $e^{-q, q}$  bei der Berechnung der Raumladungswolke unterläßt, und die BOLTZMANN-Formel in (1) durch die WICKEL-ELIX-Beziehung ersetzt. Dadurch wird eine bessere Berücksichtigung des Potentialanstiegs im Raumladungsgebiet erreicht, so daß durch die in die Leitfähigkeit und Zähigkeit dann eingehenden Exponentialfunktionen auch eine gewisse Annäherung an die Platzwechseltheorie erzielt wird<sup>2</sup>.

Da die zugehörigen Rechnungen aber nur noch numerisch zu bewältigen sind, soll auf ihre Wiedergabe hier verzichtet werden. Bei dem relativ groben Modell ist mehr als eine größenordnungsmäßige Übereinstimmung mit dem Experiment ohnehin nicht zu erwarten. Die Vermutung, daß die hier zugrunde gelegten Vorstellungen über reine COLUMB-

<sup>1</sup> D'ANS-LAX: Taschenbuch für Chemiker und Physiker. Berlin: Springer 1949.

<sup>2</sup> Für wertvolle Hinweise in dieser Richtung möchte ich Herrn Professor Dr. E. WICKE danken.



Wechselwirkungen zwischen völlig dissoziierten Ionen der Wirklichkeit recht nahe kommen, scheint aber berechtigt zu sein, so daß man aus einem eventuellen krassen Versagen der Theorie in anderen Fällen auf wesentlich andere Verhältnisse bei diesen Substanzen wird schließen dürfen. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß eine Anwendung obiger Formeln auf geschmolzenes  $\text{SiO}_2$  zu völlig falschen Resultaten führt. Homeopolare Bindungen und Assoziationen könnten hierfür verantwortlich sein.

Herrn Professor Dr. F. SAUTER und Herrn Dr. W. HÄNLEIN danke ich für wertvolle Ratschläge sowie Herrn Direktor Dr. A. SIEMENS für die Möglichkeit, diese Untersuchungen durchführen zu können.

*Rathsberg über Erlangen, Siemens-Schuckertwerke A.G., Laboratorium ZW/LS.*

## Wechselwirkung eines nichtrelativistischen Teilchens mit einem skalaren Feld für mittlere Kopplung. I<sup>1</sup>.

Von

G. HÖHLER.

Mit 2 Figuren im Text.

(Eingegangen am 16. November 1954.)

Die Energie des Grundzustandes eines nichtrelativistischen Teilchens, das mit beliebiger Stärke an ein skalares Feld gekoppelt ist, wird mit einer neuen Variationsansatz berechnet, der die Vorteile der Ansätze von PEKAR einerseits und von GURARI und LEE, LOW, PINES andererseits vereint. Er stellt eine Verallgemeinerung der „intermediate coupling method“ von TOMONAGA dar, bei der spezielle Korrelationen zwischen den Quanten berücksichtigt werden. Die Anwendung auf die Theorie der Leitungselektronen in polaren Kristallen wird kurz diskutiert.

### 1. Einleitung.

Eine zufriedenstellende Theorie der Bewegung von Elektronen in polaren Kristallen liegt gegenwärtig nicht vor. Die Schwierigkeiten rühren daher, daß eine Übertragung der Methoden der Metalltheorie nicht zulässig ist, weil sie die Voraussetzung enthalten, daß die Elektron-Gitter-Wechselwirkung als kleine Störung behandelt werden kann. Das mag für homöopolare Kristalle zutreffen, gilt aber sicher nicht für polare Kristalle, bei denen die starke Wechselwirkung des Elektrons mit den Polarisationswellen hinzukommt. Es müssen daher neue Methoden entwickelt werden, die auch bei starkerer Kopplung anwendbar sind. Von den bisherigen Ansätzen in dieser Richtung nennen wir vor allem die von PEKAR<sup>2</sup>, FRÖHLICH<sup>3</sup>, PINES<sup>4,5</sup> und ihren Mitarbeitern. Weitere Literaturangaben finden sich in den zitierten Berichten.

Nach klassischen Vorstellungen ruft das ruhende Elektron in seiner Umgebung eine Polarisation des Gitters hervor, die auch nahezu unverändert mitgeführt wird, wenn es sich langsam bewegt. Da dieses

<sup>1</sup> Vorläufige Mitteilung: HÖHLER, G.: Z. Naturforsch. **9a**, 804 (1954).

<sup>2</sup> PEKAR, S. I.: Fortschr. Physik **1**, 367 (1954) (Bericht). — Untersuchungen über die Elektronentheorie der Kristalle. Berlin: Akademie-Verlag 1954.

<sup>3</sup> FRÖHLICH, H.: Adv. Physics **3**, 325 (1954). In diesem Bericht findet man auch eine klare Darstellung der PEKARschen Theorie sowie der Methoden zur Berechnung der Beweglichkeit des Elektrons in polaren Kristallen. GURARI, M.: Phil. Mag. **44**, 329 (1953).

<sup>4</sup> LEE, T., F. LOW und D. PINES: Phys. Rev. **90**, 297 (1953), als „LLP“ zitiert. TOMONAGA, S.: Progr. theor. Phys. **2**, 6 (1947).

<sup>5</sup> LEE, T., u. D. PINES: Phys. Rev. **92**, 883 (1953).

Gebilde, ein Elektron und die von ihm hervorgerufene Gitterdeformation, auch in der quantenmechanischen Leitfähigkeitstheorie PEKARS die Eigenschaften eines Teilchens hat, gab er ihm den Namen „Polaron“, der von den anderen Autoren übernommen worden ist.

In den obengenannten Arbeiten werden vorwiegend zwei Teilprobleme untersucht:

a) Wie hängt die Energie des Grundzustandes des Polarons von der Stärke der Kopplung ab?

b) Wie groß ist die Trägheit eines Polarons in einem äußeren elektrischen Feld?

Wir werden zu a) ein Variationsverfahren angeben, das bessere Ergebnisse liefert als die bisherigen Ansätze. Die Anwendung auf b) soll in einer späteren Arbeit erfolgen.

Da die Stärke der Elektron-Gitter-Wechselwirkung erhebliche Schwierigkeiten mit sich bringt, muß das Modell soweit wie möglich vereinfacht werden. a) Reduziert sich dann auf ein fundamentales Problem der nichtrelativistischen Feldtheorie, nämlich auf die Bestimmung der Selbstenergie eines Teilchens, das mit einem skalaren Feld in Wechselwirkung steht, als Funktion der Kopplungsstärke. Für die Leitfähigkeitstheorie braucht man dann weitere Eigenschaften des „angezogenen Teilchens“, das hier als Polaron bezeichnet worden ist, insbesondere seine Trägheit. Außerdem treten durch die Einführung des Begriffs der Temperatur Fragestellungen auf, die bisher in der Feldtheorie nicht behandelt worden sind.

## 2. Der HAMILTON-Operator.

Da vor kurzem zwei Berichte über Elektronen in polaren Kristallen erschienen sind<sup>2,3</sup>, verzichten wir an dieser Stelle auf eine Begründung des HAMILTON-Operators. Wir wählen die übliche Form

$$H = \frac{p^2}{2m} - \hbar \omega \sum_{\mathbf{t}} b_{\mathbf{t}}^{\dagger} b_{\mathbf{t}} - i \hbar \omega \left( \frac{4\pi}{uV} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k} (b_{\mathbf{t}} e^{i\mathbf{t}\cdot\mathbf{r}} - b_{\mathbf{t}}^{\dagger} e^{-i\mathbf{t}\cdot\mathbf{r}}). \quad (2.1)$$

$\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$  sind Koordinate und Impuls des Elektrons,  $(b_{\mathbf{t}} - b_{\mathbf{t}}^{\dagger})$  und  $(b_{\mathbf{t}} + b_{\mathbf{t}}^{\dagger})/i$  verallgemeinerte Koordinaten und Impulse des Gitters bei Zerlegung der longitudinalen optischen Gitterschwingungen nach laufenden Wellen,  $\mathbf{t}$  ist der Ausbreitungsvektor,  $\omega$  die als konstant angenommene longitudinale „Reststrahlen“-frequenz,  $V$  ist das Normierungsvolumen,  $u^{-1} = (2m\omega/\hbar)^{-\frac{1}{2}}$  eine Länge der Größenordnung  $10^{-7}$  cm. Die atomistische Struktur des Gitters wird lediglich dadurch berücksichtigt, daß die Summen im  $\mathbf{t}$ -Raum nur über eine Kugel vom Radius  $k_0$  erstreckt werden. Die Kopplungskonstante  $g^2$  (FRÖHLICHs  $\alpha$ ) kann berechnet werden, wenn neben Materialkonstanten des Kristalls auch noch die

effektive Masse  $m$  des Elektrons in dem periodischen Potential des Gitters bekannt ist ( $\epsilon^2 \sim |m|$ ). Von dieser kann man aber gegenwärtig mit Sicherheit nicht viel mehr als die Größenordnung angeben, so daß genaue Zahlenwerte für  $\epsilon^2$  nicht vorliegen. FRÖHLICH schätzt für NaCl  $\epsilon^2 \approx 6$ , PEKAR führt ein nicht ganz überzeugendes Argument für  $\epsilon^2 = 8,8$  an, indem er aus Messungen an  $F$ -Zentren auf  $m = 2,78$  Elektronenmassen schließt (vgl. S. 181 seines Buches<sup>2</sup>).

Wir gehen zu dimensionslosen Größen über<sup>3</sup>:

$$r \rightarrow r/u, \quad p \rightarrow \hbar u p, \quad \mathfrak{k} \rightarrow u \mathfrak{k}, \quad V \rightarrow V/u^3, \quad H \rightarrow \hbar \omega H.$$

Dann wird aus (2.1)

$$H = p^2 + \sum b_{\mathfrak{k}}^{\dagger} b_{\mathfrak{k}} - i\kappa \sum_{\mathfrak{k}} \frac{1}{k} (b_{\mathfrak{k}} e^{i\mathfrak{k}r} - b_{\mathfrak{k}}^{\dagger} e^{-i\mathfrak{k}r}). \quad (2.2)$$

Den häufig vorkommenden Ausdruck  $(4\pi z/\epsilon)^{1/2}$  haben wir mit  $\kappa$  abgekürzt. Für das Elektron wählen wir die Ortsdarstellung,  $p^2$  wirkt dann als Differentialoperator  $-\Delta$ ,  $b_{\mathfrak{k}}^{\dagger}$  und  $b_{\mathfrak{k}}$  sind Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren für Schallquanten der Wellenzahl  $\mathfrak{k}$ .  $\Phi_0$  sei der „Vakuumzustand“, also  $b_{\mathfrak{k}} \Phi_0 = 0$  für alle  $\mathfrak{k}$ . Aus ihm können wir in bekannter Weise den allgemeinsten Zustand aufbauen.

Wir wollen versuchen, eine Näherung für den Grundzustand des HAMILTON-Operators (2.2) zu finden, die für alle  $\epsilon^2$  brauchbar ist. Dazu benutzen wir das Variationsverfahren. Wir machen also für den Grundzustand einen Ansatz, der noch unbestimmte Funktionen oder Parameter enthält, berechnen den Erwartungswert von  $H$  und wählen dann bei jedem  $\epsilon^2$  diejenigen Funktionen oder Parameter, die ihn zum Minimum machen. — In §. 3. besprechen wir den für schwache Kopplung guten Ansatz von LEE, LOW und PINES, in §. 4. den für stärkere Kopplung bisher besten Ansatz von PEKAR, weil wir später zeigen wollen, daß unser Verfahren zu beiden in enger Beziehung steht.

### 3. Der Ansatz von LEE, LOW und PINES<sup>4</sup>.

Der Operator der Gesamtwellenzahl

$$\mathfrak{N} = p + \sum \mathfrak{k} b_{\mathfrak{k}}^{\dagger} b_{\mathfrak{k}} \quad (3.1)$$

ist mit  $H$  vertauschbar<sup>6</sup>. Daher existiert ein vollständiges System simultaner Eigenzustände der beiden Operatoren. Geben wir einen Eigenwert  $\mathfrak{N}'$  von  $\mathfrak{N}$  vor, so ist damit ein Unterraum des HILBERT-Raumes festgelegt, der noch viele Eigenzustände von  $H$  enthält, darunter hat einer den tiefsten Eigenwert. Ziel der Rechnung ist es, eine gute Näherung für diesen Zustand und seinen Eigenwert  $E$  als Funktion von  $\mathfrak{N}'$  und  $\epsilon^2$  zu gewinnen.

<sup>6</sup> Der Unterschied gegenüber dem Erhaltungssatz für den Gesamtimpuls wird von FRÖHLICH<sup>3</sup> (§3) eingehend diskutiert.



Für kleine Kopplung gehört der Grundzustand des Systems zu  $\mathfrak{B}' = 0$  genauer  $(0, 0, 0)$ . Wir nehmen an, ohne daß wir einen Beweis dafür haben, dies gelte für alle Kopplungsstärken. Wenn der Grundzustand zu einem  $\mathfrak{B}' \neq 0$  gehörte<sup>7</sup>, wäre er stark entartet, denn  $E$  hängt nur von  $(\mathfrak{B}')^2$  ab, weil in  $H$  keine Richtung ausgezeichnet ist.

Die Tatsache, daß wir den tiefsten Zustand von  $H$  jeweils nur in dem durch einen Eigenwert von  $\mathfrak{B}$  festgelegten Unterraum suchen, ermöglicht es, die Operatoren des Elektrons zu eliminieren. Dazu transformieren LLP unitär mit

$$S = e^{i(\mathfrak{B}' - \sum \mathfrak{k} b_{\mathfrak{k}}^{\dagger} b_{\mathfrak{k}}) \tau}. \quad (3.2)$$

Dann sind die tiefsten Eigenwerte von  $S^{-1} H S$  in dem durch  $\mathfrak{p}' = 0$  (wegen  $S^{-1} \mathfrak{B} S = \mathfrak{B}' = 0$ ) festgelegten Unterraum zu ermitteln. Für Zustände aus diesem ist aber  $S^{-1} H S$  gegeben durch den Operator

$$\mathcal{H} = (\mathfrak{B}' - \sum \mathfrak{k} b_{\mathfrak{k}}^{\dagger} b_{\mathfrak{k}})^2 + \sum b_{\mathfrak{k}}^{\dagger} b_{\mathfrak{k}} + \kappa \sum \frac{1}{k} \frac{b_{\mathfrak{k}} - b_{\mathfrak{k}}^{\dagger}}{i}, \quad (3.3)$$

der nur noch von den  $b_{\mathfrak{k}}$  und  $b_{\mathfrak{k}}^{\dagger}$  abhängt. Der Variationsansatz von LLP lautet

$$\Phi_{\text{LLP}} = e^{\sum (f(\mathfrak{k}) b_{\mathfrak{k}}^{\dagger} - f^*(\mathfrak{k}) b_{\mathfrak{k}})} \Phi_0. \quad (3.4)$$

Wenn wir uns nun auf  $\mathfrak{B}' = 0$  beschränken, wird der Erwartungswert von  $\mathcal{H}$  mit dem normierten Zustand (3.4) ein Minimum, wenn

$$f(\mathfrak{k}) = -i \frac{\kappa}{k(1 + k^2)} \quad (3.5)$$

gewählt wird. Man erhält für die Energie des Grundzustandes

$$E_{\text{LLP}} = -g^2. \quad (3.6)$$

<sup>7</sup> In einer soeben erschienenen Arbeit [Progr. theor. Phys. **11**, 449 (1954)] kommt E. HAGA zu dem Ergebnis, daß für  $g^2 > 6$  die tiefste Energie nicht mehr zu  $\mathfrak{B}' = 0$  gehört. Wir vermuten, daß er den Gültigkeitsbereich seiner Näherung überschätzt hat, denn die nach unserer Meinung zuverlässigere Störungstheorie von LLP gibt bei  $g^2 = 6$  nur eine Korrektur von etwa 20%. — Im Anschluß an YOKOTA versucht HAGA (S. 450, 455), Resultate von GROSS [Phys. Rev. **84**, 818 (1951)] für das System 1 Elektron + 1 Oszillator unmittelbar auf unser System zu übertragen. Das ist nicht zulässig, denn die beiden Systeme unterscheiden sich *wesentlich* voneinander. Von vielen Argumenten hierfür bringen wir nur zwei: die Variationsverfahren<sup>2,4,5</sup> können nur für unser System, nicht jedoch für das von GROSS, formuliert werden, weil dazu viele Oszillatoren mit verschiedenen  $\mathfrak{k}$ -Werten nötig sind; bei uns gibt der tiefste Eigenwert von  $H_0$  (in 4) eine *harte* Schranke, im Spezialfall eines Oszillators gibt er jedoch eine *untere* Schranke für die Energie des Grundzustandes bei  $\mathfrak{B}' = 0$ . — Im Falle der von HAGA ebenfalls erwähnten Supraleitung hängt die Stärke der Kopplung mit der Anwesenheit sehr vieler Elektronen zusammen, so daß hier ein unmittelbarer Vergleich ebenfalls fragwürdig ist.

Eine andere Form des Ansatzes folgt mit der Beziehung

$$e^{f b^+ - f^* b} = e^{-\frac{1}{2} f f^*} e^{f b^+} e^{-f^* b}. \quad (3.7)$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{LLP}} &= e^{-\frac{1}{2} \sum f^2} \prod_t e^{f(t) b_t^+} \Phi_0 \\ &= e^{-\frac{1}{2} \sum f^2} \left\{ 1 + \sum_t f(t) b_t^+ + \sum_{t_1, t_2} \frac{1}{2!} f(t_1) f(t_2) b_{t_1}^+ b_{t_2}^+ + \dots \right\} \Phi_0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Wenn wir dies mit der Entwicklung eines beliebigen Zustandes nach Zuständen mit 0, 1, 2, ... Teilchen vergleichen

$$\Phi = \left\{ g_0 + \sum_t g_1(t) b_t^+ + \sum_{t_1, t_2} g_2(t_1, t_2) b_{t_1}^+ b_{t_2}^+ + \dots \right\} \Phi_0 \quad (3.9)$$

können wir die Mannigfaltigkeit der von LLP berücksichtigten Zustände so charakterisieren: es sind alle Funktionen  $g_n(t_1, \dots, t_n)$  zugelassen, die als Produkt in der Form  $f(t_1) f(t_2) \dots f(t_n)$  darstellbar sind, wobei die Funktion  $f$  für alle  $n$  die gleiche ist und von vornherein beim  $n$ -ten Term ein Koeffizient  $(n!)^{-1}$  steht. Man kann von einem HARTREESchen Ansatz (im  $t$ -Raum) sprechen, bei dem sich alle Schallquanten in demselben Zustand  $f(t)$  befinden. Diese Formulierung zeigt die Verbindung zu TOMONAGAs „intermediate coupling method“<sup>4</sup>.

#### 4. Der Rückstoßterm.

Wir wollen nun den Rückstoßterm in (3.3) – das ist  $|\sum_t t b_t^+ b_t|^2$ , denn vorläufig betrachten wir nur  $\mathfrak{B}^2 = 0$  – zu einer oberen und einer unteren Schranke<sup>5</sup> für den tiefsten Eigenwert von  $\mathcal{H}$  in Beziehung setzen. Der tiefste Eigenwert von  $\mathcal{H}$  liegt sicher höher als der von

$$\mathcal{H} - (\sum_t t b_t^+ b_t)^2 = \sum_t b_t^+ b_t + \kappa \sum_k \frac{1}{k} \frac{b_k - b_k^+}{i} \quad (4.1)$$

mit

$$c_t = b_t + i \frac{\kappa}{k} \quad (4.2)$$

entsteht aus (4.1)

$$\sum_t c_t^+ c_t - \kappa^2 \sum_k \frac{1}{k^2}. \quad (4.3)$$

Der tiefste Eigenwert dieses Operators hängt wesentlich von  $k_0$  ab.

$$E = -\frac{2}{\gamma} k_0 g^2. \quad (4.4)$$

Die Existenz dieser unteren Schranke ist also eine Folge des Abschneidens (s. u. 6.).

Nach dem gleichen Verfahren, jedoch mit

$$c_t = b_t + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad (4.5)$$

kann man eine exakte Lösung auch noch erhalten, wenn man nur einen Teil des Rückstoßterms wegläßt. Wir ordnen die Operatoren um nach dem Gesichtspunkt: Vernichtungsoperatoren nach rechts:

$$\left( \sum_t \mathfrak{k} b_t^+ b_t \right)^2 = \sum_t k^2 b_t^+ b_t + \sum_{t_1, t_2} (\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2) b_{t_1}^+ b_{t_2}^+ b_{t_1} b_{t_2} \quad (4.6)$$

und zerlegen  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{H}_0$  und  $\mathcal{H}'$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \sum (1 + k^2) b_t^+ b_t + \kappa \sum_k \frac{1}{k} \frac{b_t - b_t^+}{i} \\ \mathcal{H}' &= \sum (\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2) b_{t_1}^+ b_{t_2}^+ b_{t_1} b_{t_2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Der tiefste Eigenwert von  $\mathcal{H}_0$  ist<sup>8</sup>

$$E = -g^2. \quad (4.8)$$

Das ist eine obere Schranke, denn es stimmt genau mit dem Variationsergebnis von LLP überein (3.6).

Die exakte Kurve beginnt bei  $g^2 = 0$  an der oberen Schranke. Um dies einzusehen, gehen wir von dem Operator  $\mathcal{H}_0$  aus und behandeln  $\mathcal{H}'$  als kleine Störung. In der zweiten Näherung finden wir eine negative Korrektur zu (4.8), die mit  $g^4$  wächst und bei  $g^2 = 5$  erst etwa 6% beträgt<sup>9</sup>. — Die gewöhnliche Störungsrechnung mit dem Kopplungsterm als Störung kann, da die erste Näherung keinen Beitrag gibt, nur auf (4.8) führen, denn das Ergebnis muß proportional zu  $g^2$  sein und wir haben gesehen, daß (4.8) für kleine Kopplung gültig ist. Die Zerlegung  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}'$  ist jedoch besser, weil bei einer Entwicklung des Grundzustandes in der Form (3.9) im Falle schwacher Kopplung die beiden ersten Terme dominieren.  $\mathcal{H}'$  wirkt auf diese aber wie ein Faktor Null. Außerdem bewirkt der in  $\mathcal{H}'$  enthaltene Faktor  $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2)$  eine Verkleinerung des Matrixelements (bei  $g^2 = 5$  ist die mittlere Zahl der Schallquanten<sup>4</sup> bereits 2,5). — Mit ansteigender Kopplung nimmt der Einfluß von  $\mathcal{H}'$  dann aber schnell zu.

Eine Verbesserung gegenüber LLP ist nur dadurch möglich, daß der Variationsansatz so gewählt wird, daß

- a) sein Erwartungswert mit  $\mathcal{H}'$  negativ ist,
- b) sein Erwartungswert mit  $\mathcal{H}_0$  der sicher höher als  $-g^2$  liegt, die Verbesserung a) nicht wieder aufhebt.

<sup>8</sup> Wir haben bei der Berechnung von (4.8) wie LLP die  $t$ -Integration bis  $\infty$  erstreckt. Berücksichtigung des Abschneidens gäbe den Faktor  $(2/\pi) \arctg k_0 \approx 0,9$ .

<sup>9</sup> Siehe auch HAGA, I. c. <sup>7</sup>.

Der Erwartungswert von  $\mathcal{H}'$  mit  $\Phi_{LLP}$  ist Null. Da für kleine Kopplung  $\Phi_{LLP}$  schon recht gut ist, wird man nicht einen ganz neuen Ansatz suchen, sondern eine Verallgemeinerung, die auf negative Erwartungswerte von  $\mathcal{H}'$  führt. Es bieten sich zwei einfache Möglichkeiten:

a) Wir bleiben bei der HARTREE-Näherung im  $\mathbf{k}$ -Raum, lassen aber neben  $f(\mathbf{k})$ , das sich für  $\mathcal{Z}' = 0$  als nur von  $\mathbf{k}$  abhängig erwiesen hat, noch weitere von der Richtung von  $\mathbf{k}$  abhängige Zustände zu, damit der Faktor  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  in  $\mathcal{H}'$  zur Wirkung kommen kann. Diesen Weg haben LEE und PINES eingeschlagen<sup>7</sup>, indem sie neben dem „s-Zustand“  $f(k)$  noch die drei „p-Zustände“  $g(k)k_x/k$ ,  $g(k)k_y/k$ ,  $g(k)k_z/k$  berücksichtigen.

β) Wir verlassen den Rahmen der HARTREE-Näherung, indem wir jedem der  $n$ -Teilchen-Terme in (3.8) einen Faktor anfügen, der nicht mehr als Produkt von Funktionen mit je einer Variablen  $\mathbf{k}_i$  geschrieben werden kann. Das entspricht der Einführung von Korrelationen in den Variationsansätzen für das  $\text{H}_2$ -Molekül und das He-Atom, jedoch auf den  $\mathbf{k}$ -Raum übertragen. Ein Beispiel wäre (wir beschränken uns auf  $g_2$ )

$$g_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{2!} f(k_1) f(k_2) [1 + \alpha^2 (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2]^{-2}. \quad (4.9)$$

Man sieht leicht, daß die Paare von Vektoren mit negativem  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  bevorzugt werden, denn sie haben ein kleineres  $(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2$ . Mit dem Wert 0 des Variationsparameters  $\alpha$  kommen wir auf  $\Phi_{LLP}$  zurück, so daß das Ergebnis nicht schlechter sein kann als das von LLP.

Der Hinweis auf diese naheliegende Verallgemeinerung ist natürlich erst interessant, wenn es gelingt, einen Weg zur Berechnung des Erwartungswertes von  $\mathcal{H}$  zu finden. Durch Übergang zu einer FOURIER-Integraldarstellung für den liniengefügten Faktor kommt man zu einem Produktansatz zurück, kann analog zu (3.8) einen geschlossenen Ausdruck für den neuen Ansatz finden und auch den Erwartungswert von  $\mathcal{H}$  berechnen. Wir führen das nicht näher aus, weil sich in 10. der Zusammenhang mit einer anderen Methode zeigen wird, der wir uns nun zuwenden wollen.

Es gibt einen einfachen Ansatz von PEKAR, der für  $g^2 > 10$  bald erheblich besser wird als der von LEE und PINES. Die vorliegende Arbeit ist aus der Vermutung entstanden, daß diese Verbesserung auf Korrelationen in obigem Sinne zurückzuführen ist, die in PEKARS Ansatz enthalten sind. Wir werden zunächst den Ansatz besprechen (5.), dann eine Modifikation angeben, durch die es möglich wird, die Form (3.9) herzustellen (9.) und zeigen, daß die Vermutung zutrifft (10.). Während bei PEKAR die Stärke der Korrelation vorgegeben ist, regeln wir sie durch einen Variationsparameter und geben ihr damit bei jeder Kopplung den günstigsten Wert. In 10. werden wir schließlich feststellen, daß der Ansatz verallgemeinert werden kann, ohne daß neue Schwierigkeiten bei der Berechnung des Erwartungswertes von  $\mathcal{H}$  auftreten.



5. Der Ansatz von PEKAR<sup>10, 2, 3</sup>.

PEKAR kommt, von klassischen Überlegungen ausgehend, zu der Vorstellung, daß man in guter Näherung den Grundzustand des Polarons beschreiben kann, indem man für das Elektron und für das Gitter je einen „besten“ Zustand  $\psi(\mathbf{r})$  bzw.  $\Phi_G$  angibt. Diese beiden Zustände sollen in folgender Beziehung stehen:

a) Die aus dem Elektronenzustand  $\psi(\mathbf{r})$  zu berechnende Ladungsdichte  $e\psi^*\psi$  erzeugt durch Polarisierung den Gitterzustand  $\Phi_G$ .

b) Im Zustand  $\Phi_G$  sind im Gitter Ladungen aus ihren Gleichgewichtslagen verschoben. Man kann in der Kontinuumsnäherung auf einfache Weise das als Folge der Verzerrung auftretende elektrische Potential ausrechnen.  $\psi(\mathbf{r})$  soll der tiefste Elektronenzustand in diesem Potentialtopf sein.

Die Forderungen a) und b) sind gleichbedeutend damit, daß man zur Bestimmung des Grundzustandes von  $H$  den Ansatz

$$\Psi_P^{(0)} = \psi(\mathbf{r}) \Phi_G \quad (5.1)$$

macht. Es ist günstig,  $\psi(\mathbf{r})$  so zu wählen, daß die Ladung des Elektrons praktisch auf einen kleinen Bereich (von der Größe einiger Gitterkonstanten) lokalisiert ist. Obwohl physikalisch alle Punkte des Kristalls gleichberechtigt sind, zwingt der Ansatz zur Auszeichnung eines Ortes, ohne daß das Ergebnis von seiner Lage abhängt. Wir wählen den Ursprung des Koordinatensystems, weisen durch den oberen Index an  $\Psi_P^{(0)}$  darauf hin und setzen  $\psi(\mathbf{r})$  kugelsymmetrisch an, weil in  $H$  keine Richtung bevorzugt ist. — Die Variation von  $(\psi \Phi_G, H \psi \Phi_G)$  nach  $\Phi_G$  bei festem  $\psi$  und Beachtung der Normierung führt auf eine exakt lösbare Eigenwertgleichung (Feld mit vorgegebenen Quellen, „BLOCH-NORDSIECK-Problem“).

$$(\psi, H \psi) \Phi_G = E[\psi] \Phi_G. \quad (5.2)$$

Mit der Abkürzung

$$\varrho(\mathbf{f}) = \int e^{-i\mathbf{f}\cdot\mathbf{r}} |\psi|^2 d\mathbf{r} = \varrho(|\mathbf{f}|), \quad \text{da} \quad \psi(\mathbf{r}) = \psi(|\mathbf{r}|) \quad (5.3)$$

entsteht ein HAMILTON-Operator für Oszillatoren mit verschobener Ruhelage

$$(\psi, H \psi) = -(\psi, \Delta \psi) + \sum b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} + \kappa \sum_{\mathbf{k}} \frac{b_{\mathbf{k}} - b_{\mathbf{k}}^*}{i} \varrho(\mathbf{k}). \quad (5.4)$$

Wir bringen den in  $b, b^*$  linearen Term wie in (4.2) zum Verschwinden durch

$$c_{\mathbf{k}} = b_{\mathbf{k}} + i\kappa \frac{\varrho(\mathbf{k})}{k} \quad (5.5)$$

<sup>10</sup> Wir betrachten hier nur den Produktansatz von PEKAR. Zur adiabatischen Näherung s. <sup>17</sup>.

und erhalten

$$(\psi, H\psi) = \sum c_i^+ c_i - \kappa^2 \sum \frac{\varrho^2(k)}{k^2} - (\psi, \Delta\psi). \quad (5.6)$$

Der tiefste Eigenwert dieses Operators ist leicht abzulesen, weil die  $c_i$  denselben Vertauschungsrelationen genügen wie die  $b_i$ . Außerdem gehen wir von der Summe zum Integral über

$$E_P[\psi] = -g^2 \frac{2}{\pi} \int_0^{k_0} \varrho^2(k) dk + 4\pi \int_0^\infty \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 r^2 dr. \quad (5.7)$$

Bei der Bestimmung des Grundzustandes von (5.4) beachten wir, daß die verschiedenen  $\mathbf{k}$  in (5.4) separiert sind. Wir machen daher den Produktansatz

$$\Phi_n = \prod_i \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\mathbf{k}) \frac{(b_i^+)^n}{(n!)} \Phi_0 \quad (5.8)$$

Zur Bestimmung der  $C_n(\mathbf{k})$  benutzen wir die Relation  $b_i \Phi_0 = 0$ , durch die der gesuchte Zustand definiert ist. Mit (5.5) und (5.8) folgt das Gleichungssystem

$$[n+1] C_{n+1}(\mathbf{k}) = \frac{\kappa}{i} \frac{\varrho(k)}{k} C_n(\mathbf{k}) \quad (5.9)$$

mit der Lösung

$$C_n(\mathbf{k}) = n! \left( \frac{\kappa}{i} \frac{\varrho(k)}{k} \right)^n \frac{C_0(\mathbf{k})}{(n!)^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.10)$$

$C_0$  ist aus der Normierung zu bestimmen. Zu jedem  $\psi(r)$  lautet also der bestmögliche normierte Gitterzustand

$$\Phi_G = e^{-\frac{1}{2}\kappa \sum \frac{\varrho}{k^2}} e^{-i\kappa \sum \frac{\varrho}{k} b_i^+} \Phi_0 = e^{-i\kappa \sum \frac{\varrho}{k} (b_i^+ - b_i)} \Phi_0. \quad (5.11)$$

Bemerkenswert ist die Ähnlichkeit zu (3.4), auf die wir später zurück kommen.

Die Bestimmung des günstigsten  $\psi(r)$  wird zweckmäßigerweise so ausgeführt, daß man eine geeignete normierte Funktion mit einigen Variationsparametern einsetzt und diese so bestimmt, daß der Erwartungswert von  $H$  ein Minimum wird. Wir beschränken uns auf zwei einfache Ansätze mit je einem Parameter und vernachlässigen zunächst das Abschneiden bei  $k_0$ .

$$\left. \begin{aligned} \psi(r) &= (\pi\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{\alpha}}; & \varrho(k) &= \left[ 1 + \left( \frac{\alpha k}{2} \right)^2 \right]^{-2} \\ E_P(g^2) &= -\frac{2}{3\pi} g^4 = -0,098 g^4; & \alpha &= \frac{1}{3} g^{-2}, \\ \psi(r) &= (2/\pi\beta^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{\beta^2}}; & \varrho(k) &= e^{-\frac{\beta^2 k^2}{8}} \\ E_P(g^2) &= -\frac{1}{3\pi} g^4 = -0,106 g^4; & \beta &= 3 \left[ \pi g^{-2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

<sup>11</sup> Dieser Ansatz wird auch von FRÖHLICH<sup>3</sup> diskutiert.

PEKAR kam mit einigem Aufwand an numerischer Rechnung noch etwas weiter<sup>2</sup>

$$\left. \begin{aligned} \psi(r) &= 0,1229 \alpha^{-\frac{3}{2}} (1 + r/\alpha + 0,4516 r^2/\alpha^2) e^{-\frac{r}{\alpha}} \\ E_P(g^2) &= -0,109 g^4. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Dieser Wert liegt für  $g^2 = 9,2$  tiefer als das Ergebnis von LLP und für  $g^2 > 10,2$  tiefer als das von LEE und PINES (Fig. 2).

### 6. Der Grenzfall starker Kopplung.

LEE und PINES haben für ihren Ansatz den Grenzfall starker Kopplung diskutiert. Sie finden, wenn sie bei  $k_0$  abschneiden, für das Variationsergebnis  $E(g^2)$  eine Annäherung an die untere Schranke und damit an die exakte Lösung. PEKAR erhielt ohne abzuschneiden  $E \sim g^4$  (5.14). Da die untere Schranke wie  $g^2$  geht (4.4), liegt die Vermutung nahe, daß mit Berücksichtigung des Abschneidens ein ähnliches Verhalten eintritt. Die Rechnung macht mit den Ansätzen (5.12) und (5.13) keine Schwierigkeiten<sup>1</sup> und bestätigt die Erwartung. Obwohl LEE und PINES nicht den ganzen Verlauf sondern nur das asymptotische Verhalten angegeben haben, darf man wohl annehmen, daß ihre Kurve höher liegt als unsere (Fig. 1).

Die in (5.13) vorkommende Größe  $\beta$  ist ein Maß für die Ausdehnung des Potentialtopfes und damit des Gebietes, in dem das Gitter merklich polarisiert ist. Es nimmt bei kleinen und mittleren Kopplungen wie  $g^{-2}$  ab (5.13). Bei  $g^2 \approx 15$  erreicht es die Größenordnung der Gitterkonstanten. Nun beginnt das Abschneiden merkbar zu werden, indem es zu einer langsameren Abnahme führt. Die kinetische Energie des Elektrons, die ja unmittelbar mit der Größe des Potentialtopfes zusammenhängt, verhält sich entsprechend. Die Tatsache, daß sie bei starker Kopplung gegenüber den anderen Energien relativ klein wird, daß also ein einfacher „Grenzfall starker Kopplung“ existiert, ist somit ein Abschneideeffekt und hat mit unserem eigentlichen Problem nichts zu tun.

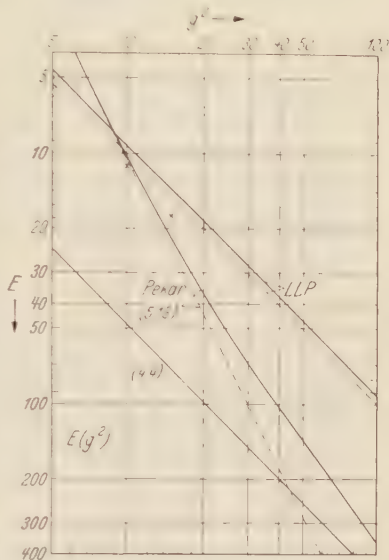


Fig. 1.  $E(g^2)$  in doppelt-logarithmischer Darstellung.

Mit Berücksichtigung des Abschneidens bei  $k_0 = 7,5$ ; ----- mit  $k_0 = \infty$ . LEE und PINES<sup>3</sup> haben nur einige Punkte (x) mit  $k_0 = \infty$  gerechnet und gezeigt, daß sich ihre Kurve für  $g^2 \rightarrow \infty$  der unteren Schranke (4.4) asymptotisch nähert.

Die Frage, ob es auch ohne Abschneiden einen einfachen Grenzfall starker Kopplung gibt, behandeln wir im zweiten Teil der Arbeit.

Wir werden im folgenden alle  $t$ -Integrationen bis nach  $\infty$  führen, weil sonst erhebliche rechnerische Komplikationen auftreten. Die Ergebnisse sollten bis etwa  $g^2 \approx 15$  und damit für alle bisher untersuchten Kristalle anwendbar sein, denn sowohl bei PERKARs Lösung als auch bei der von LEE und PINES<sup>15</sup> S. 888, abgesehen von<sup>16</sup>, wirkt sich das Abschneiden erst von dieser Kopplung an aus.

### 7. Der Translationsoperator des Polarons.

Wir haben oben gesehen, daß in PERKARs Ansatz ein Ort ausgezeichnet ist: der Mittelpunkt der Ladungsverteilung und zugleich auch der Gitterdeformation. Für diesen „Ort des Polarons“ hatten wir den Ursprung des Koordinatensystems gewählt. Mit gegebenem Zustand des Elektrons und dem zugehörigen besten Gitterzustand ergab sich für den Zustand des Systems

$$\Psi_P^{(0)} = \psi(r) e^{-\frac{1}{2} \kappa^2 \sum \frac{q^2(k)}{k^2}} e^{-i\kappa \sum_k \frac{q}{k} b_k^\dagger} \Phi_0. \quad (7.1)$$

Darin ist  $q$  aus  $\psi$  zu berechnen (5.3).

Wir interessieren uns nun für den Fall, daß sich das Polaron an einem anderen Ort befindet, etwa in  $r_0$ . Die Rechnung verläuft wie in 5., an Stelle von  $\psi(r)$  haben wir die gleiche Funktion von  $r - r_0$ , an Stelle von  $q(k)$

$$q_{r_0}(k) = \int e^{-i k r} |\psi(r - r_0)|^2 dr = e^{-i k r_0} q(k). \quad (7.2)$$

Bei der Bildung von (5.4) erhält<sup>17</sup> jetzt noch den Faktor  $e^{-i k r_0}$  und den Faktor  $e^{-i k r_0}$ . Der Zustand des Polarons am Ort  $r_0$  lautet schließlich

$$\Psi_P^{(r_0)} = \psi(|r - r_0|) \Phi^{(r_0)}; \quad \Phi^{(r_0)} = e^{-\frac{1}{2} \kappa^2 \sum \frac{q^2(k)}{k^2}} e^{-i\kappa \sum_k \frac{q}{k} b_k^\dagger} e^{-i k r_0} \Phi_0. \quad (7.3)$$

Der obere Index an  $\Phi^{(r_0)}$  bezeichnet den Mittelpunkt der Gitterdeformation, den unteren Index „G“ lassen wir von jetzt ab fort.

Nun konstruieren wir einen unitären Operator  $T(r_0)$ , der die Verschiebung bewirkt

$$\Psi_P^{(r_0)} = T(r_0) \Psi_P^{(0)}. \quad (7.4)$$

Der Elektronenteil in  $T$  muß offensichtlich der Verschiebungsoperator

$$e^{-i(r_0 \nabla)} = e^{-r_0 \text{grad}} \quad (7.5)$$

sein. Der Gitteranteil  $T_G$  ist

$$T_G(r_0) \Phi^{(0)} = e^{-i \sum b_k^\dagger b_k(t r_0)} \Phi^{(0)} = \Phi^{(r_0)}. \quad (7.6)$$



Zum Beweis dieser Formel benötigt man zwei Zwischenergebnisse der zu (3.3) führenden Rechnung

$$T_G(\mathbf{r}_0) b_t^\dagger T_G^{-1}(\mathbf{r}_0) = b_t^\dagger e^{-i\mathbf{t}\mathbf{r}_0} \quad (7.7)$$

und

$$T_G(\mathbf{r}_0) \Phi_0 = \Phi_0. \quad (7.8)$$

Der „Translationsoperator des Polarons“ ist also<sup>12</sup>

$$T(\mathbf{r}_0) = e^{-i\mathbf{r}_0 \cdot (\mathbf{p} + \sum \mathbf{t} b_t^\dagger b_t)}. \quad (7.9)$$

Zur infinitesimalen Translation gehört der schon früher eingeführte Wellenzahloperator (3.1)

$$\mathfrak{B} = \mathbf{p} + \sum \mathbf{t} b_t^\dagger b_t. \quad (7.10)$$

Die zu der unitären Transformation  $T$  gehörige kanonische Transformation lautet

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}, \quad b_t \rightarrow b_t e^{i\mathbf{t}\mathbf{r}_0}, \quad b_t^\dagger \rightarrow b_t^\dagger e^{-i\mathbf{t}\mathbf{r}_0}. \quad (7.11)$$

Die Invarianz von  $H$  gegenüber (7.11) entspricht der Vertauschbarkeit mit  $T$  bzw.  $\mathfrak{B}$ . In einem richtigen Gitter, also ohne die Kontinuumsnäherung, ist die Situation anders, weil der obige Übergang zur infinitesimalen Transformation nicht mehr möglich ist.

### 8. Erweiterung des PEKARSchen Ansatzes.

Man könnte denken, daß es bei mittlerer und erst recht bei starker Kopplung nicht mehr sinnvoll ist, von den Teilsystemen „Elektron“ und „Gitter“ sowie von ihren Zuständen zu sprechen. PEKAR tut dies jedoch in demselben Sinne, in dem HARTREE Zustände einzelner Elektronen behandelt. Das Elektron stellt seinen Zustand nach dem *Mittelwert* des Gitterzustandes ein und das Gitter richtet sich nach der *mittleren* Ladungsverteilung des Elektrons. Es ist bemerkenswert, daß PEKARS Ansatz gerade bei kleiner Kopplung versagt, aber bei starker Kopplung bis jetzt günstiger war als jeder andere.

Wenn man ihn verbessern will, muß man über den Produktansatz (5.1) hinausgehen, d.h. Elektronen- und Gitterbewegung dürfen nicht mehr unabhängig voneinander sein. Die folgende einfache Abhängigkeit kann ohne besondere Schwierigkeit berücksichtigt werden<sup>1</sup>: der Zustand des Elektrons sei weiterhin  $\psi(\mathbf{r})$ , aber der Mittelpunkt des Potentialtopfes liege jetzt nicht mehr im Nullpunkt sondern bei  $\eta\mathbf{r}$ . Mit dem

<sup>12</sup> Die Bezeichnung stammt von PEKAR, er meint die Translation des lokalisierten Zustandes  $\Psi_P^{(0)}$  und nicht etwa die Anwendung von  $T$  auf exakte Eigenzustände.

Gitteranteil (7.6) des Translationsoperators folgt<sup>13</sup>

$$\Psi_{\eta} = T_G(\eta \mathbf{r}) \Psi_P^{(0)} = \psi(r) e^{-i\frac{\pi}{2} \sum_k \frac{r^2}{k} e^{-i\pi \eta} \sum_l \frac{a}{k} e^{-i\pi \eta} e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}} \Phi_0 \quad (8.1)$$

$\eta$  ist ein Variationsparameter, der die Stärke dieser „Korrelation“<sup>14</sup> regelt. Mit dem Wert Null kommen wir auf den alten Ansatz zurück. Wir berechnen den Erwartungswert von  $H$

$$(\Psi_{\eta}, H \Psi_{\eta}) = (\Psi_P^{(0)}, \bar{H} \Psi_P^{(0)}); \quad \bar{H} = T_G^{-1}(\eta \mathbf{r}) H T_G(\eta \mathbf{r}). \quad (8.2)$$

$\bar{H}$  ergibt sich mit (7.7) zu

$$\bar{H} = - \left( \text{grad} - i\eta \sum_l \mathbf{l} b_l^+ b_l \right)^2 + \left. \begin{aligned} &+ \sum b_l^+ b_l - i\pi \sum_k \frac{1}{k} (b_l e^{i\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}(1-\eta)} - b_l^+ e^{-i\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}(1-\eta)}) \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Insgesamt folgt für den Erwartungswert der noch von der Funktion  $\psi(r)$  abhängige Ausdruck

$$E(\eta; \psi) = 4\pi \int_0^{\infty} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 r^2 dr - \left. \begin{aligned} &\frac{2\pi^2}{\pi} \left\{ 2 \int_0^{\infty} q(k) q(k(1-\eta)) dk - \int_0^{\infty} q^2 dk - \eta^2 \int_0^{\infty} q^2 k^2 dk \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

In dieser Formel gilt zwischen  $q$  und  $\psi$  die Beziehung (5.3). Andererseits kann man natürlich einen Ansatz (8.1) machen, in dem  $q$  und  $\psi$  unabhängig voneinander sind. Dann geht zwar die anschauliche Interpretation verloren, aber (8.4) bleibt gültig, wir müssen nur die Funktion  $q$  mit dem Argument  $k(1-\eta)$  durch einen Index von den anderen unterscheiden, denn sie ist nach wie vor gemäß (5.3) aus  $\psi$  zu berechnen. — Nun kommen wir auf die nach (5.11) bemerkte Ähnlichkeit zu (3.8) zurück. (8.4) geht in  $S\Phi_{\text{LLP}}$  [(3.2), (3.8),  $\mathfrak{B}' = 0$ ] über, wenn  $\psi(r) \rightarrow 1$ ,  $-i\pi q(k)/k \rightarrow f(k)$ ,  $\eta \rightarrow 1$ . Ein geeigneter Variationsansatz (8.1) mit voneinander unabhängigen  $q$  und  $\psi$  ist also sicher nicht schlechter als der von LLP und der von PEKAR. Da jedoch eine vorläufige Auswertung nicht so gute Ergebnisse brachte wie das nun zu schildernde Verfahren, das überdies den Vorzug hat, Eigenzustände zu  $\mathfrak{B}$  zu liefern, gehen wir hier auf spezielle Ansätze (8.1) nicht näher ein.

<sup>13</sup> Herr Professor FRÖHLICH hat mir freundlicherweise die in § 6.2 seines Berichtes erwähnte Arbeit von BUCKINGHAM (E.R.A. Report L/T 312) übersandt und mich darauf aufmerksam gemacht, daß BUCKINGHAM'S Ansatz mit (8.1) eng verwandt ist.

<sup>14</sup> Der Begriff „Korrelation“ wird hier in anderem Sinne verwendet als in 4.

9. Herstellung von Eigenzuständen von  $\mathfrak{H}$  aus PEKARS Produktlösung.

In einer Bemerkung am Ende von 4. haben wir darauf hingewiesen, daß es interessant ist, den PEKARSchen Ansatz mit dem von LLP zu vergleichen. Unmittelbar ist das nicht möglich, denn es fehlt ihm eine Eigenschaft, die sowohl die exakte Lösung als auch die von LLP und LEE und PINES haben: er ist kein Eigenzustand von  $\mathfrak{H}$ <sup>15</sup>. Man kann PEKARS Ansatz aber nach Eigenzuständen von  $\mathfrak{H}$  zerlegen und den zu  $\mathfrak{H}' = 0$  gehörigen Anteil  $\Psi_0$  nehmen. Dann ist der Vergleich möglich und er führt auch zum Ziel, denn wir werden sehen, daß  $\Psi_0$  noch besser ist als  $\Psi_P$ . Im Hinblick auf die spätere Berechnung der Masse des Polarons beschränken wir uns vorläufig noch nicht auf  $\mathfrak{H}' = 0$  sondern behandeln gleich den allgemeinen Fall.

Zur Zerlegung von  $\Psi_P$  benutzen wir einen Projektionsoperator, der auf den zu  $\mathfrak{H}'$  gehörigen Unterraum projiziert

$$\Psi_{\mathfrak{H}'} = (2\pi)^3 \delta(\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}) \Psi_P^{(0)} = \int e^{i(\mathfrak{H}' - \mathfrak{H})\mathfrak{R}} d\mathfrak{R} \Psi_P^{(0)}, \quad (9.1)$$

$\Psi_{\mathfrak{H}'}$  ist nicht normiert. — Um zu zeigen, daß es Eigenzustand von  $\mathfrak{H}$  ist, wenden wir zunächst den Operator  $T$  (7.9) an

$$T(\mathfrak{r}_0) \Psi_{\mathfrak{H}'} = e^{-i\mathfrak{H}\mathfrak{r}_0} \int e^{i(\mathfrak{H}' - \mathfrak{H})\mathfrak{R}} d\mathfrak{R} \Psi_P^{(0)} = e^{-i\mathfrak{H}'\mathfrak{r}_0} \Psi_{\mathfrak{H}'}. \quad (9.2)$$

Das gilt für alle  $\mathfrak{r}_0$ , also ist  $\Psi_{\mathfrak{H}'}$  Eigenzustand von  $\mathfrak{H}$  zum Eigenwert  $\mathfrak{H}'$ . (9.1) kann auch anders gelesen werden

$$\Psi_{\mathfrak{H}'} = \int e^{i\mathfrak{H}'\mathfrak{R}} T(\mathfrak{R}) \Psi_P^{(0)} d\mathfrak{R} = \int e^{i\mathfrak{H}'\mathfrak{R}} \Psi_P^{(\mathfrak{R})} d\mathfrak{R}. \quad (9.3)$$

Wir haben also Zustände des PEKARSchen Typs mit verschiedenen Orten des Polarons so linear kombiniert, daß das Resultat Eigenzustand von  $\mathfrak{H}$  ist. Diese Formulierung erinnert an die Metalltheorie. Bei seiner Näherung für tiefe Energien ging BLOCH von den Atomfunktionen, also lokalisierten Zuständen, aus und bildete eine analoge Linearkombination, um die Symmetrie des HAMILTON-Operators zu berücksichtigen. Im Sinne der Störungstheorie für entartete Systeme ging er zur „richtigen“ Linearkombination nullter Näherung über. Der Erfolg war ein verbesserter Wert für die Energie des tiefsten Zustandes. Auch in unserm Fall ist der Erwartungswert der Energie mit  $\Psi_0$  tiefer als das PEKARSche Ergebnis (Fig. 2).

Wir setzen den Erwartungswert der Energie in unserer Näherung

$$E(\mathfrak{H}') = \frac{(\Psi_{\mathfrak{H}'}, H \Psi_{\mathfrak{H}'})}{(\Psi_{\mathfrak{H}'}, \Psi_{\mathfrak{H}'})} \quad (9.4)$$

<sup>15</sup> FRÖHLICH weist in seinem Bericht<sup>3</sup> ausdrücklich darauf hin, daß es vorteilhaft wäre, die PEKARSche Lösung so zu modifizieren, daß Eigenzustände von  $\mathfrak{H}$  entstehen (S. 352). Diese Möglichkeit wird auch von H. HAKEN diskutiert (Halbleiterprobleme I, herausgegeben von W. SCHOTTKY, Vieweg 1954, S. 72, Fußnote 8).

in Beziehung zu PEKARs Resultat  $E_P$

$$\int (\Psi_{\mathfrak{W}}, H \Psi_{\mathfrak{W}}) d\mathfrak{W}' = \int e^{i\mathfrak{W}'(\mathfrak{R}-\mathfrak{R}')} (\Psi_P^{(\mathfrak{R})}, H \Psi_P^{(\mathfrak{R})}) d\mathfrak{W}' d\mathfrak{R} d\mathfrak{R}' \left\{ \right. \quad (9.5)$$

$$= (2\pi)^3 V (\Psi_P^{(0)}, H \Psi_P^{(0)}) = (2\pi)^3 V E_P. \quad \left. \right\}$$

Es folgt

$$E_P = \int E(\mathfrak{W}') \frac{(\Psi_{\mathfrak{W}}, \Psi_{\mathfrak{W}})}{(2\pi)^3 V} d\mathfrak{W}'. \quad (9.6)$$

PEKARs Energie des Grundzustandes ist also ein Mittelwert über die tiefsten Energien bei gegebenem  $\mathfrak{W}'$  im Rahmen unseres Ansatzes (9.1). Sie liegt damit sicher *höher* als unser tiefstes  $E(\mathfrak{W}')$ . Wir haben ebenso wenig wie bei der exakten Lösung einen allgemeinen Beweis dafür, daß dieses tiefste  $E$  zu  $\mathfrak{W}' = 0$  gehört. Die notwendige Bedingung für ein Minimum  $\text{grad}_{\mathfrak{W}} E(\mathfrak{W}') = 0$  ist jedoch erfüllt, weil  $E$  nur von  $\mathfrak{W}^{(2)}$  abhängt.

Wenn wir durch Integration über  $\mathfrak{W}'$  (9.3) nach  $\Psi_P^{(0)}$  auflösen und berücksichtigen, daß  $\Psi_{\mathfrak{W}}$  nicht normiert ist

$$\Psi_P^{(0)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Psi_{\mathfrak{W}} d\mathfrak{W}' = \int \frac{(\Psi_{\mathfrak{W}}, \Psi_{\mathfrak{W}})^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\Psi_{\mathfrak{W}}}{(\Psi_{\mathfrak{W}}, \Psi_{\mathfrak{W}})^{\frac{1}{2}}} d\mathfrak{W}'. \quad (9.7)$$

erscheint PEKARs Zustand als „Wellenpaket“ aus Zuständen  $\Psi_{\mathfrak{W}}$ . Die klassische Vorstellung eines bewegten lokalisierten Polarons kann nur eine brauchbare Näherung sein, solange das Wellenpaket nicht merklich auseinander fließt.

Für die weitere Rechnung ist es zweckmäßig, (9.1) so umzuformen, daß es die Gestalt

$$\Psi_{\mathfrak{W}} = S \chi \quad (9.8)$$

annimmt, wo  $S$  der in (3.2) definierte Operator ist.

$$\Psi_{\mathfrak{W}} = S \cdot \int e^{i\mathfrak{W}'(\mathfrak{R}-\mathfrak{r})} e^{-i\mathfrak{p}\mathfrak{R}} e^{-i\sum_l b_l^\dagger b_l(\mathfrak{R}-\mathfrak{r})} d\mathfrak{R} \Psi_P^{(0)}. \quad (9.9)$$

Die Wirkung der beiden letzten Exponentialfaktoren auf  $\Psi_P^{(0)}$  kennen wir aus 7. Mit  $\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + \mathfrak{R}$  und der in [7.3] eingeführten Bezeichnung für die Gitterdeformation mit dem Mittelpunkt  $\mathfrak{R}$  entsteht

$$\chi = \int e^{i\mathfrak{W}'\mathfrak{R}} \psi(\mathfrak{R}) \Phi(\mathfrak{R}) d\mathfrak{R}. \quad (9.10)$$

Nun mußten wir mit (9.8), (9.10) den Erwartungswert von  $H$  ausrechnen. Zuvor wollen wir unser Ergebnis jedoch noch unter einem anderen Gesichtswinkel betrachten.

### 10. Allgemeine Form unseres Variationsansatzes.

Die Vorgabe eines Variationsansatzes für  $\chi$  (9.8) kann dadurch erfolgen, daß man von einem Operator  $U$  ausgeht, der eine Funktion aller  $b_l^\dagger$  und  $b_l$  ist und ihn auf den Vakuumzustand  $\Phi_0$  wirken läßt.  $U$  enthält



noch Funktionen und Parameter, die variiert werden können, so daß  $U\Phi_0$  eine ganze Klasse von Zuständen umfaßt. Zu einem brauchbaren Ansatz gehört nicht nur, daß die Mannigfaltigkeit der berücksichtigten Zustände gut ausgewählt ist, sondern es muß auch möglich sein, den Erwartungswert des HAMILTON-Operators mit erträglichem Aufwand auszurechnen. Bei der Behandlung des BROCH-NORDSTRAK-  
Problems ist uns ein unitärer Operator begegnet (5.11), der als Verschiebungsoperator für die  $b_i^*$  und  $b_i$  wirkt, so daß der Erwartungswert  $\langle U\Phi_0, \mathcal{H}U\Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0, U^{-1}\mathcal{H}U\Phi_0 \rangle$  leicht ermittelt werden kann. Mit  $U = \exp \{f(\mathfrak{k}) b_i^* - f^*(\mathfrak{k}) b_i\}$  gilt [Formel (12) von LLP]

$$U^{-1} b_i^* U = b_i^* + f^*(\mathfrak{k}); \quad U^{-1} b_i U = b_i + f(\mathfrak{k}). \quad (10.1)$$

Hierauf beruhen die Methoden von TOMONAGA und LLP. Mit (3.7) folgt

$$e^{\Sigma(f(\mathfrak{k})b_i^* - f^*(\mathfrak{k})b_i)} \Phi_0 \sim e^{\Sigma f(\mathfrak{k})b_i^*} \Phi_0. \quad (10.2)$$

Die allgemeinste Form unseres Ansatzes besteht nun darin, daß wir für die Operatorfunktion  $U$  eine Integraldarstellung

$$\int G(\mathfrak{R}) e^{\Sigma F(\mathfrak{k}, \mathfrak{R}) b_i^*} d\mathfrak{R} \Phi_0 \quad (10.3)$$

verwenden. Durch diesen Kunstgriff ist die Berechnung des Erwartungswertes von  $\mathcal{H}$ , was die Operatoren betrifft, fast ebenso wie einfach bei LLP. Es kommen allerdings sechs  $\mathfrak{R}$  Integrationen hinzu und man muß bei der Wahl von  $F$  und  $G$  darauf achten, daß fünf davon und die  $\mathfrak{k}$ -Integrationen analytisch ausführbar sind. Die letzte Integration kann dann numerisch gemacht werden. (10.3) umfaßt natürlich eine viel größere Mannigfaltigkeit von Zuständen als (10.2).

In 9. haben wir durch Anwendung eines Projektionsoperators auf die PEKARSche Lösung einen Spezialfall von (10.3) erhalten

$$G(\mathfrak{R}) = \psi(R) e^{i\mathfrak{W}\mathfrak{R}}; \quad F(\mathfrak{k}, \mathfrak{R}) = -i\kappa \frac{\varrho(k)}{k} e^{-i\mathfrak{k}\mathfrak{R}}. \quad (10.4)$$

Eventuelle Bedenken gegen die mathematisch nicht strengen Methoden in 9. haben keine Folgen für die Brauchbarkeit des Ansatzes (10.4), denn ein Variationsansatz bedarf keiner Begründung. Seine Güte zeigt sich bei der Berechnung der Energie. Wir werden in 12a ein Beispiel zu (10.4) bringen.

In (10.4) ist  $\varrho$  die FOURIER-Transformierte (5.3) von  $|\psi|^2$ . Diese Beziehung wird jedoch bei der Berechnung des Erwartungswertes von  $\mathcal{H}$  nicht benutzt. Sie ist lediglich von Bedeutung, wenn wir den Zusammenhang mit der PEKARSchen Lösung untersuchen. Ähnlich wie in 8. betrachten wir daher künftig  $\varrho$  und  $\psi$  als unabhängig voneinander und

fügen auch wieder einen Variationsparameter  $\eta$  ein.

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{\mathfrak{M}'} &= S(Z) \cdot Z = \int e^{i\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{R}} \psi(R) \Phi^{(i\mathfrak{R})} d\mathfrak{R} \\ \Phi^{(\eta\mathfrak{R})} &= e^{-i\alpha \sum b_l^+ \frac{\partial}{\partial k} e^{-i\eta t \mathfrak{R}}} \Phi_0. \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

Der Erfolg ist wiederum, daß bei geeigneter Wahl von  $\varrho$ ,  $\psi$ ,  $\eta$  als Funktion von  $g^2$  ein Ansatz resultiert, der nirgends schlechter ist als der von LLP und überall besser als der von PLEKAR. Im Gegensatz zu 8. haben wir jetzt aber Eigenzustände von  $\mathfrak{H}$ . Einige Rechnungen mit (10.5) bringen wir in 12b.

Nun wollen wir noch die Verbindung zu 4. herstellen. Dazu entwickeln wir (10.5) in der Form (3.9) und beschränken uns auf  $\mathfrak{B}' = 0$  und auf  $g_2$

$$g_2(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2) \sim \frac{\varrho(k_1)}{k_1} \frac{\varrho(k_2)}{k_2} [\tilde{\psi}^{-1} \eta(\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2)]. \quad (10.6)$$

Dabei ist

$$\tilde{\psi}(\mathfrak{K}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi(K) e^{-i\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R}} d\mathfrak{R}. \quad (10.7)$$

Speziell werden wir in 12b  $\varrho = (1 + k^2)^{-1}$ ,  $\psi \sim e^{-R \cdot x}$  wählen. Dann ist  $\tilde{\psi}(K) \sim [1 + \alpha^2 K^2]^{-2}$  und wir kommen mit (3.5) auf den in 4. angegebenen Ausdruck zurück ( $\eta = 1$ ).

### 11. Berechnung des Erwartungswertes von $H$ .

Der Zustand (10.5) ist bereits so geschrieben, daß wir leicht auf  $\mathcal{H}$  (3.5) übergehen können<sup>16</sup>

$$E(\mathfrak{H}') = \frac{(\Psi_{\mathfrak{M}'}, H \Psi_{\mathfrak{M}'})}{(\Psi_{\mathfrak{M}'}, \Psi_{\mathfrak{M}'})} = \frac{(\chi, \mathcal{H} \chi)}{(\chi, \chi)} \quad (11.1)$$

Zuerst rechnen wir  $(\Phi^{(\eta\mathfrak{R}')} , \Phi^{(\eta\mathfrak{R}'')})$  aus. Dazu ersetzen wir die Summe im Exponenten durch ein Produkt von Exponentialfunktionen, schreiben für diese die Reihenentwicklung und finden nach einigen Umformungen mit  $\mathfrak{B} = \mathfrak{R}'' - \mathfrak{R}'$

$$(\Phi^{(\eta\mathfrak{R}')} , \Phi^{(\eta\mathfrak{R}'')}) = e^{l(\eta Z)}; \quad l(\eta Z) = \frac{\kappa^2}{2\pi^2} \int \frac{\varrho^2(k)}{k^2} e^{-i\eta t \mathfrak{B}} d\mathfrak{k} \quad (11.2)$$

$(\Phi^{(\eta\mathfrak{R}')} , \mathcal{H} \Phi^{(\eta\mathfrak{R}'')})$  führen wir auf (11.2) zurück, indem wir mit der Vertauschungsrelation

$$[b_l, e^{\sum b_l^+ F(\mathfrak{k}, \mathfrak{R})}] = F(\mathfrak{k}, \mathfrak{R}) e^{\sum b_l^+ F(\mathfrak{k}, \mathfrak{R})}, \quad (11.3)$$

die  $b_l$  nach rechts durchziehen und mit den  $b_l^+$  dasselbe machen, nachdem wir sie als  $b_l$  auf die andere Seite des Produkts gebracht haben.

<sup>16</sup> Die Klammern beziehen sich im mittleren Term auch auf die Variablen des Elektrons, im rechten Term jedoch nicht mehr. Ein Faktor  $V$  wurde gekürzt.

Der vom Gitter herrührende Anteil ist dann

$$(\Phi^{(\eta\mathfrak{R})}, \sum b_t^+ b_t \Phi^{(\eta\mathfrak{R}'')}) = l(\eta Z) e^{l(\eta Z)}. \quad (11.4)$$

Beim Rückstoßterm nehmen wir die Zerlegung (4.6) vor und finden

$$(\mathfrak{W}')^2 e^{l(\eta Z)}, \quad (11.5)$$

$$\frac{g^2}{2\pi^2} \int (\hbar^2 - 2\mathfrak{k}\mathfrak{W}') \frac{\varrho^2(\hbar)}{\hbar^2} e^{-i\eta\mathfrak{k}\mathfrak{Z}} d\mathfrak{k} e^{l(\eta Z)}, \quad (11.6)$$

$$\frac{g^4}{4\pi^4} \iint (\mathfrak{k}, \mathfrak{k}') \frac{\varrho^2(\hbar)}{\hbar^2} \frac{\varrho^2(\hbar')}{\hbar'^2} e^{-i\eta\mathfrak{Z}(\mathfrak{k}+\mathfrak{k}')} d\mathfrak{k} d\mathfrak{k}' e^{l(\eta Z)} - \left. e^{l(\eta Z)} \right|_{d(\eta Z)}^2. \quad (11.7)$$

Der Wechselwirkungsterm bringt wie (11.7) einen negativen Beitrag

$$- \frac{g^2}{2\pi^2} \int \frac{\varrho(\hbar)}{\hbar^2} (e^{-i\eta\mathfrak{k}\mathfrak{R}''} + e^{i\eta\mathfrak{k}\mathfrak{R}'}) d\mathfrak{k} e^{l(\eta Z)}. \quad (11.8)$$

Über die nun auszuführenden  $\mathfrak{k}$ -Integrationen ist allgemein nichts zu sagen. Bei den  $\mathfrak{R}$ -Integrationen erhalten wir Integrale des Typs ( $\psi$  ist reell)

$$J = \int \psi(R') \psi(R'') e^{i\mathfrak{W}\mathfrak{Z}} h(\mathfrak{Z}) d\mathfrak{R}' d\mathfrak{R}''. \quad (11.9)$$

Für die drei Funktionen im Integranden setzen wir Integraldarstellungen ein\* [vgl. (10.7)]

$$h(\mathfrak{Z}) = \int e^{i\mathfrak{R}\mathfrak{Z}} \tilde{h}(\mathfrak{R}) d\mathfrak{R}. \quad (11.10)$$

Die Integrale über  $\mathfrak{R}'$  und  $\mathfrak{R}''$  ergeben  $\delta$ -Funktionen, so daß auch die  $\mathfrak{R}'$  und die  $\mathfrak{R}''$ -Integrationen sofort ausführbar sind. Es bleibt

$$J = (2\pi)^3 \int e^{i\mathfrak{W}\mathfrak{Z}} h(\mathfrak{Z}) \int e^{-i\mathfrak{R}\mathfrak{Z}} [\tilde{\psi}(K)]^2 d\mathfrak{R} d\mathfrak{Z}. \quad (11.11)$$

Da das letzte Integral nur von  $\mathfrak{Z}$  abhängt und in 12. nur  $h(Z)$  vorkommt, kann die Integration über die Winkel noch allgemein ausgeführt werden

$$J = 32\pi^4 \int_{\mathfrak{W}\mathfrak{Z}}^{\sin \frac{\pi}{2} \mathfrak{Z}} Z^2 h(Z) \int e^{-i\mathfrak{R}\mathfrak{Z}} [\tilde{\psi}(K)]^2 d\mathfrak{R} dZ. \quad (11.12)$$

Diese Formel erlaubt die Berechnung der Normierung sowie der Gitter- und Elektronenanteile der Energie. Die Wechselwirkungsenergie gehört nicht zum Typ (11.9); man kann sie entweder direkt ausrechnen oder auch Integraldarstellungen (11.10) verwenden. Es genügt, sich auf den ersten Term in (11.8) zu beschränken, denn der zweite bringt noch einmal dasselbe.

## 12. Numerische Durchführung.

a) Wir haben in 5. gesehen, daß die einfache GAUSS-Funktion beinahe ebenso gut ist wie der beste PEKARsche Ansatz. Daher wollen wir mit ihr die Güte des in 9. geschilderten Verfahrens erproben.  $\psi$  und  $\varrho$  sind

\* Diese Methode zur Auswertung von  $J$  verdanke ich Herrn Dr. LEIBFRIED.

in (5.13) angegeben. Mit  $\gamma = \eta Z/\beta$ ,  $\xi = g^2/\beta$  erhalten wir für die Gitterenergie

$$E_G = \frac{1}{N} \xi \int_0^\infty e^{\xi \frac{\Phi(y)}{\gamma}} e^{-\frac{\gamma^2}{2\eta^2} y^2} \frac{\Phi(y)}{\gamma} dy \quad (12.1)$$

$\Phi(y)$  bedeutet hier das Fehlerintegral. Der Erwartungswert der kinetischen Energie des Elektrons besteht, wie in 4. näher erläutert, aus einem positiven und einem negativen Anteil

$$E_{El} = \frac{1}{N} \frac{\xi^3}{g^4} \int_0^\infty e^{\xi \frac{\Phi(y)}{\gamma}} e^{-\frac{\gamma^2}{2\eta^2} y^2} \left\{ \frac{4}{\pi} e^{-y^2} - \xi \left[ \left( \frac{\Phi(y)}{\gamma} \right)' \right]^2 \right\} dy. \quad (12.2)$$

Die Wechselwirkungsenergie beträgt

$$E_W = -\frac{1}{N} 4\xi \int_0^\infty e^{\xi \frac{\Phi(y)}{\gamma}} e^{-\frac{\gamma^2}{2\eta^2} y^2} y \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2+2\eta^2}}\right) dy. \quad (12.3)$$

$N$  ist bis auf einen Faktor das Normierungsintegral

$$N = \int_0^\infty e^{\xi \frac{\Phi(y)}{\gamma}} e^{-\frac{\gamma^2}{2\eta^2} y^2} dy. \quad (12.4)$$

Im Grenzfall kleiner Kopplung gilt

$$E(\beta, \eta) = -\left\{ \frac{2}{\pi} \frac{1}{\xi} \left\{ 8 - 1 - \xi^{-2} \right\} g^2 \right\}. \quad (12.5)$$

Mit dem günstigsten Wert von  $\xi = \beta/\eta^2 = 1.2$  ergibt dies  $E = -0.77\xi^2$ . Da PEKAR-Kurve wie  $\xi^4$  einmündet, ist die Verbesserung beträchtlich.  $E = -g^2$  wird nicht erreicht, weil  $\varrho$  von der für kleine Kopplung günstigsten Funktion (11)  $\sim \xi^2$  verschieden ist. Numerische Rechnungen sind nur für  $\eta=1$  ausgeführt worden.

$E$  ist eine Funktion von  $\beta$  und  $g^2$ . Eigentlich müßte man zu jedem  $g^2$  das günstigste  $\beta$  bestimmen. Es ist aber einfacher,  $E$  als Funktion von  $\xi = g^2/\beta$  und  $g^2$  zu betrachten und zu jedem  $g^2$  das beste  $\xi$  zu suchen.  $E_G + E_W$  hängt überhaupt nur von  $\xi$  ab und zwar beinahe linear

$$E_G + E_W = A(\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \left\{ 8 - 1 - \xi^{-2} \right\} g^2 = -\frac{2}{\pi} \cdot 1.00 \xi, & \xi^2 \ll 1 \\ -\frac{2}{\pi} \xi; & g^2 \gg 1. \end{cases} \quad (12.6)$$

$A(\xi)$  und das durch  $E_{El} = B(\xi)/\xi^4$  definierte  $B(\xi)$  werden durch numerische Integration bestimmt. Wenn wir  $E$  über  $g^2$  auftragen, gibt es



zu jedem  $\xi$  eine Hyperbel

$$E(g^2, \xi) = A(\xi) + \frac{B(\xi)}{g^4}, \quad (12.7)$$

Die Einhüllende ist unser gesuchtes  $E(g^2)$ . Fig. 2 zeigt, daß wir eine merkliche Verbesserung der PEKARSCHEN Kurve erreicht haben. Der Schnitt mit  $E = g^2$  liegt jetzt bei  $g^2 = 7.2$  gegenüber dem früheren Wert 9,2<sup>17</sup>.

b) In 12a wollten wir feststellen, welche Verbesserungen die in 9. vorgenommene Modifikation des PEKARSCHEN Ansatzes für  $E(g^2)$  bringt. Unbefriedigend bleibt vor allem das Verhalten für kleine Kopplung. Man könnte daran denken, für  $q = 1/(1+k^2)$  und für  $\psi$  die mit diesem  $q$  aus (5.3) zu berechnende Funktion einzusetzen. Dann kommt man aber erstens auf schwierige Integrale und zweitens divergiert in der zugehörigen Lösung vom Produkttyp (5.1) die kinetische Energie des Elektrons. Daher gehen wir zu (10.5) über, wählen  $q$  und  $\psi$  unabhängig voneinander und setzen

$$\left. \begin{aligned} q/k &= 1 - \frac{1}{2} k^2 e^{-\frac{r}{\alpha}}; \\ \psi &= e^{-\frac{r}{\alpha}} \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

$q$  und  $\psi$  sind so beschaffen, daß für die Werte  $n=1$ ,  $\beta=2$ ,  $\eta=0$  der Variationsparameter der Ansatz von LLP resultiert ( $\mathfrak{M}'=0$ ) und für die Werte  $n=2$ ,  $\alpha=\beta$ ,  $\eta=1$  ein Ansatz des in 9. diskutierten Typs vorliegt. Da wir uns vorwiegend für mittlere Kopplung interessieren, haben wir zunächst nur  $n=1$  gerechnet.

Es sei  $w = 2\eta Z/\beta$ ,  $\mu = 2g^2/\beta$ ,  $\lambda = 2\alpha\eta/\beta$

$$\left. \begin{aligned} m_1(\alpha) &= \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{1}{2} e^{-\alpha}; & m_2(\alpha) &= 4\alpha \left( 1 - \alpha + \frac{w^2}{2} e^{-\alpha} \right) \\ m_3(w) &= 4w(1 - e^{-w}) & m_4(w) &= \frac{\left( e^{-w} \left( 1 - \alpha + \frac{w^2}{2} \right) - 1 \right)^2}{w^4} \end{aligned} \right\} \quad (12.9)$$

<sup>17</sup> Der Unterschied zwischen dem Spezialfall (9.1) unseres Ansatzes (10.3) und dem PEKARSCHEN Produktansatz beträgt etwa  $3/2 \hbar \omega$  (Fig. 2). PEKARS adiabatische Näherung<sup>2</sup> liegt ebenfalls um  $3/2 \hbar \omega$  tiefer als der Produktansatz. Eine einfache Beziehung zwischen beiden Theorien ist nicht ersichtlich, es lohnt sich aber, den Zusammenhang genauer zu untersuchen, weil dabei zugleich endgültig geklärt werden kann, worauf PEKARS großer Wert für die Masse des Polarons zurückzuführen ist ( $m_P = 17m_e$ , vgl. Fußnote auf S. 416 in PEKARS Bericht).

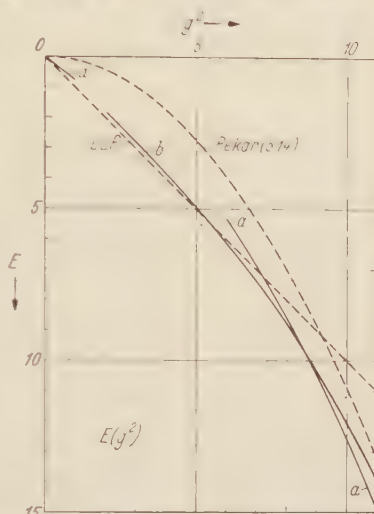


Fig. 2.  $E(g^2)$  mit  $k_0 = \infty$ . Die ausgezogenen Kurven sind das Ergebnis unserer Rechnung in 12a. und 12 b. Die Werte von LEE und PINES<sup>18</sup> sind mit  $\times$  bezeichnet.

Dann wird

$$E_G = \frac{1}{N} \mu \int_0^\infty e^{\mu m_1(w) - w/\lambda} \left( \frac{w^4}{3\lambda^2} + \frac{w^3}{\lambda} + w^2 \right) m_1(w) dw, \quad (12.10)$$

$$E_{E1} = \frac{1}{N} \mu^4 \int_0^\infty e^{\mu m_1(w) - w/\lambda} \left( \frac{w^4}{3\lambda^2} + \frac{w^3}{\lambda} + w^2 \right) \left[ \frac{1}{2\mu} e^{-w} - m_4(w) \right] dw, \quad (12.11)$$

$$E_W = - \frac{1}{N} \mu \int_0^\infty e^{\mu m_1(w) - w/\lambda} \times \left\{ \frac{m_2(w)}{\lambda^2} + \frac{2(\lambda+4)}{\lambda(\lambda+2)} w^2 - \left[ \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda+3}{(\lambda-2)^2} \right] m_3(w) \right\} dw. \quad (12.12)$$

$N$  ist bis auf einen Faktor das Normierungsintegral

$$N = \int_0^\infty e^{\mu m_1(w) - w/\lambda} \left( \frac{w^4}{3\lambda^2} + \frac{w^3}{\lambda} + w^2 \right) dw. \quad (12.13)$$

Die Energie  $E = E_G + E_{E1} + E_W$  hat wieder die Form

$$E(g^2; \lambda, \mu) = A(\lambda, \mu) + \frac{B(\lambda, \mu)}{g^4}. \quad (12.14)$$

Die drei Variationsparameter  $\alpha, \beta, \eta$  kommen also nur in der Kombination  $\lambda, \mu$  vor. Hieraus entsteht die gesuchte Funktion  $E(g^2)$ , wenn man für jedes  $g^2$  dasjenige Wertepaar  $\lambda, \mu$  einsetzt, das  $E$  zum Minimum macht. Da die Berechnung von  $A$  und  $B$  für ein Wertepaar bereits mehrere numerische Integrationen erfordert, beschränken wir uns zunächst auf  $\lambda=1$ .  $A$  und  $B$  wurden für  $\mu=5, 10, 20, 30$  berechnet und konnten dann für Zwischenwerte gut interpoliert werden, weil  $A, \mu$  beinahe linear ist und  $B, \mu$  sich beinahe wie  $\mu^3$  verhält. Dann wurden die Hyperbeln (12.14) gezeichnet. Ihre Einhüllende ist eine Näherung für das zu unserem Ansatz gehörige  $E(g^2)$ , die sicher zu hoch liegt, weil wir die Werte für  $\mu$  und  $\lambda$  fest gewählt haben, statt sie zu variieren. Die Kurve ist in Fig. 2 dargestellt.

Da  $\lambda \rightarrow 0$  auf  $\Phi_{111}$  zurückführt, erwarten wir für kleine  $g^2$  kleine Werte von  $\lambda$ . (12.14) gibt bei einer Entwicklung nach Potenzen von  $\lambda$  zunächst in nullter Ordnung

$$E(g^2; \mu) = -\frac{3}{2} \mu + \frac{\mu^3}{2g^4}. \quad (12.15)$$

Das beste  $\mu$  ist gleich  $g^2$  und es wird, wie erwartet  $E = -g^2$ . — Die erste Ordnung hängt nur von  $\lambda$  ab<sup>18</sup> und muß einen positiven Koeffizienten haben, weil nach 4. jede Verbesserung von dem dort definierten  $\mathcal{H}$  bewirkt wird und dieser Anteil der kinetischen Energie des Elektrons

<sup>18</sup> Wenn wir auch negative  $\eta, \lambda$  betrachten, muß im Ergebnis der  $\mathfrak{f}$ -Integrationen in 11.  $|\eta|$  statt  $\eta$  stehen.  $\alpha, \beta$  sind stets positiv.

erst bei  $\lambda^2$  beginnt. Für sehr kleine  $\lambda$  gibt also (12.14) stets eine höhere Energie als mit  $\lambda=0$ .

Wenn wir zu jeder Kopplung das beste Wertepaar  $\lambda, \mu$  als Punkt in der  $\lambda, \mu$ -Ebene markieren, entsteht eine Kurve, deren Punkten Werte von  $g^2$  zugeordnet sind. Nach obiger Überlegung beginnt sie bei  $g^2=0$  im Ursprung und hat zunächst die Richtung der  $\mu$ -Achse. Bei einem noch nicht bekannten  $g^2$ , das nach Fig. 2 jedoch unter 5,5 liegen muß, macht sie einen Sprung, weil sehr kleine  $\lambda$ -Werte, d. h. kleine Korrelationen, bei keiner Kopplung die günstigsten sind.

### Schlußbemerkung.

Das am Ende von 12. angedeutete Verhalten könnte ein grundsätzlicher Mangel des Ansatzes (10.3) sein. In diesem Falle müßte man ihn so erweitern, daß die Abweichungen des exakten Grundzustandes von  $\Phi_{111}$  besser approximiert werden. Einmal bietet sich die Möglichkeit, den Ansatz (9) der Arbeit von LEE und PINES<sup>5</sup> durch Übergang zu einer Integraldarstellung ähnlich zu verallgemeinern, wie wir es mit dem Ansatz von LLP getan haben. Andererseits kann man Anregungen für einen Variationsansatz bei mittlerer Kopplung erhalten, wenn man die Eigenzustände erster Näherung derjenigen Störungsrechnungen, die in nullter Näherung  $E = -g^2$  liefern (4. sowie LLP), in der Form (3.9) darstellt. Wir folgen damit Methoden von FRÖHLICH, PELZER, ZIENAU<sup>19</sup> und GURARI<sup>3</sup>.

Die Frage nach der Trägheit des Polarons kann beantwortet werden, sobald  $E(\mathfrak{S}'^2)$  für kleine  $\mathfrak{S}'^2$  bekannt ist<sup>19</sup>. In unserer Näherung macht die Berechnung dieser Funktion keine besonderen Schwierigkeiten, die numerische Auswertung ist jedoch noch nicht abgeschlossen.  $g$ , das jetzt auch von der Richtung von  $\mathbf{f}$  abhängen kann, ist so zu wählen, daß  $E(\mathfrak{S}'^2)$  möglichst tief liegt, die Masse also möglichst groß wird. — Es ist keinesfalls sicher, daß ein Verfahren, daß eine tiefere Energie für den Grundzustand liefert, nun auch einen genaueren Wert für die Masse ergibt. Da die Masse so empfindlich von der Art der Näherung abhängt, ist ihre Berechnung eigentlich erst dann von Interesse, wenn zugleich die Abweichung vom exakten Wert abgeschätzt werden kann (Störungstheorie von LLP, s. auch<sup>3</sup>, S. 353). Auf die Kritik<sup>1</sup> an PEKARS Methode werden wir zurückkommen, wenn die in<sup>17</sup> genannte Untersuchung abgeschlossen ist.

### Zusammenfassung.

Es wird ein Variationsansatz für die Berechnung des Grundzustandes des Polarons angegeben<sup>20</sup>, der folgende Eigenschaften hat:

1. Er ist eine Verallgemeinerung der Ansätze von GURARI und LLP durch Berücksichtigung von Korrelationen zwischen den Schallquanten.

<sup>19</sup> FRÖHLICH, H. PELZER u. S. ZIENAU: Phil. Mag. **41**, 221 (1950).

<sup>20</sup> Nach einem Hinweis von FRÖHLICH<sup>3</sup> (S. 355) könnte das Verfahren auch für die Supraleitung von Interesse sein.

2. Er ist zugleich eine Verallgemeinerung des Produktansatzes von PEKAR, die stets Eigenzustände von  $\mathfrak{H}$  liefert. Damit ist die Beziehung zwischen diesen beiden Ansätzen geklärt.

3. Die Energie liegt für alle Kopplungsstärken nicht höher als bei den in 1. und 2. genannten Autoren. Vorläufige Rechnungen, bei denen die verfügbaren Variationsparameter nur teilweise ausgenutzt wurden, ergaben das in Fig. 2 dargestellte Resultat. Unsere Eigenzustände von  $\mathfrak{H}$  liegen also für alle Kopplungsstärken *tiefer* als die lokalisierten Produktzustände PEKARS.

4. Es ist wünschenswert, das Verfahren auf andere Typen der Korrelation zu erweitern, damit das noch nicht zufriedenstellende Verhalten bei kleiner Kopplung verbessert wird.

Ich danke Herrn Professor BECKER für sein freundliches Interesse an der Arbeit, Herrn Dr. H. LEHMANN für zahlreiche Diskussionen und Herrn A. MÜLLENSIEFEN für Unterstützung bei den Rechnungen.

*Anmerkung bei der Korrektur:* Für starke Kopplung können die Integrale in 12a ohne numerische Rechnung ausgewertet werden. Man erhält eine Entwicklung nach fallenden Potenzen von  $g^4$ :

$$E = -\frac{1}{3\pi} g^4 - \frac{3}{2} \dots$$

Die Differenz zur Energie des Grundzustandes in PEKARS adiabatischer Näherung<sup>17</sup> verschwindet also wie  $g^{-4}$ .

Göttingen, Institut für Theoretische Physik der Universität.



# Zerfall und Erzeugung von $\Lambda$ -Teilchen.

Von

GERNOT EDER.

Mit 1 Figur im Text.

(Eingegangen am 19. November 1954.)

Auf Grund einfacher feldtheoretischer Wechselwirkungsansätze wird das Verhältnis der Lebensdauern von freien und gebundenen  $\Lambda$ -Teilchen berechnet; die Konsequenzen dieser Resultate für verschiedene  $\Lambda$ -Erzeugungsmechanismen werden diskutiert.

CIOK und Mitarbeiter<sup>1</sup> haben auf Grund der vorliegenden Messungen gezeigt, daß im Kern gebundene  $\Lambda$ -Teilchen ( $\Lambda$ ) eher direkt in ein Nukleon ( $N$ ) übergehen, als entsprechend dem Schema  $\Lambda \rightarrow N + \pi$  zu zerfallen. Die beiden Prozesse sollen hier feldtheoretisch miteinander verglichen werden.

Das  $\Lambda$ -Feld kann man durch einen Spinor oder einen Pseudospinor beschreiben. Wird es durch einen Spinor beschrieben, dann nimmt die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen und  $\Lambda$ -Teilchen die Form

$$H'_1 = i g (\bar{\psi}_N \gamma_5 \tau_i \psi_\Lambda) \Phi_i \quad (1)$$

an. Die reziproke Lebensdauer eines freien, ruhenden  $\Lambda$ -Teilchens ergibt sich daraus zu

$$w_\pi = (g^2/4\pi) [(M^2 + m^2 - \mu^2)^2 (2M)^{-2} - m^2]^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \begin{array}{l} \\ \times (2M)^{-2} [(M - m)^2 - \mu^2]^{\frac{1}{2}}, \end{array} \right. \quad (2)$$

wo  $\mu$ ,  $m$  und  $M$  die Pion-, Nukleon- und  $\Lambda$ -Masse bedeuten. Numerisch bedeutet dies:  $w(\Lambda \rightarrow p + \pi) = 3,6 \cdot 10^{20} \text{ sec}^{-1} (g^2/4\pi)$ ; für den Zerfall  $\Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0$  ergibt sich der doppelte Wert. Mit  $\tau = 3 \cdot 10^{-10} \text{ sec}$  für  $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$  folgt

$$(g^2/4\pi) = 0,93 \cdot 10^{-11}. \quad (3)$$

Der Zerfall eines im Atomkern gebundenen  $\Lambda$ -Teilchens kann auch ohne  $\pi$ -Emission vor sich gehen und zwar dadurch, daß der Überschuß an Energie und Impuls an ein Nukleon abgegeben wird. CHESTON und PRIMAKOFF<sup>2</sup> haben den nichtmesonischen Zerfall von  $\Lambda$ -Teilchen nach der pseudovektoriellen Theorie in nichtrelativistischer Näherung berechnet. Hier wird der kovariante Formalismus zur Berechnung der

<sup>1</sup> CIOK, P., M. DANYSZ u. J. GIERULA: Nuovo Cim. **11**, 436 (1954).

<sup>†</sup>  $\hbar = c = 1$ .

<sup>2</sup> CHESTON, W., u. H. PRIMAKOFF: Phys. Rev. **92**, 1537 (1953).

Übergangswahrscheinlichkeit verwendet. Nehmen wir für die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung einen Term der Form

$$H' = if (\bar{\psi}_N \gamma_5 \tau_i \psi_N) \Phi_i \quad (4)$$

an, so erhalten wir in zweiter störungstheoretischer Näherung entsprechend dem Übergang Fig. 1 für die Übergangswahrscheinlichkeit pro Nukleon im Kern  $A$  nach Mittelung über Spin und isotonen Spin (wir nehmen das Anfangsnukleon und das  $A$ -Teilchen als ruhend an):

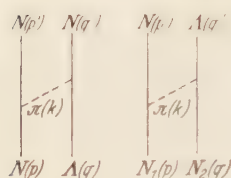


Fig. 1.  $\pi$ -freier  $A$ -Zerfall und  $A$ -Erzeugung durch  $N-N$ -Stoß.

$$w_A = \frac{\pi}{V} \left( \frac{fg}{4\pi} \right)^2 \overline{(\tau_A \cdot \tau_N)^2} \times \left. \begin{aligned} & \times \frac{(M-m)^2}{\mu^2 + m(M-m)^2} \frac{(M+m)^2 + 4m^2}{(M^2 + m^2 - \mu^2)^2 (M+m)^2} \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

Setzen wir für das Kernvolumen  $V = (4\pi/3\mu^3)A$  und vergleichen wir die Wahrscheinlichkeiten für den Zerfall ohne bzw. mit  $\pi$ -Emission, so ergibt sich aus (2) und (5):

$$\frac{w}{w_\pi} = 3 \frac{f^2}{4\pi} \overline{(\tau_A \cdot \tau_N)^2} \times \left. \begin{aligned} & \times \frac{(M-m)^2 M^2 \mu^3}{(M+m)^2 \mu^2 + m(M-m)^2} \frac{(M+m)^2 + 4m^2}{(M^2 + m^2 - \mu^2)^2 (M+m)^2} \right\} \end{aligned}$$

Numerisch bedeutet dies:

$$w/w_\pi = 1,631 (f^2/4\pi) \overline{(\tau_A \cdot \tau_N)^2}. \quad (6)$$

Für  $(\tau_A \cdot \tau_N) = 1$  wird daher mit  $(f^2/4\pi) = 10$ :

$$w/w_\pi = 16,31. \quad (7)$$

Ein im Atomkern gebundenes  $A$ -Teilchen wird also eher ohne Emission eines Pions zerfallen als nach dem Schema  $A \rightarrow N + \pi$ .

Es sollen nun einige Konsequenzen dieser Ansätze zum  $A$ -Teilchenzerfall für die Erzeugungsprozesse diskutiert werden. Der zum zweiten Zerfallsschema inverse Prozeß (vgl. Fig. 1) wird wegen der kleinen Konstante  $g$  einen sehr kleinen Wirkungsquerschnitt haben. Um ein Zahlenbeispiel anzugeben, nehmen wir für das einfallende Nukleon eine kinetische Energie von  $T = 2,2$  GeV an; für die Erzeugung in der Einfallrichtung ergibt sich mit (3) numerisch:  $d\sigma/d\Omega(\theta=0) = 5,2 \cdot 10^{-12}$  mb  $(\tau_{N_1} \tau_N)^2$  im Lab.system; dabei wurde  $(f^2/4\pi) = 10$  gesetzt. Die Schwellenenergie für diesen Prozeß beträgt im Schwerpunktsystem  $E_{\text{schw}} = \frac{1}{2}(M+m)$ , d.h.  $E_{\text{schw}} = m + 373$  MeV im L.S. Obwohl also die Schwellenenergie sehr niedrig liegt, ist der Wirkungsquerschnitt für  $A$ -Teilchenerzeugung sehr klein, wenn er durch die Wechselwirkung  $H'$  vermittelt wird.

Ein anderer Erzeugungsmechanismus für  $\Lambda$ -Teilchen liegt im Falle der Paarerzeugung vor: Beschreiben wir die  $\pi$ - $\Lambda$ -Wechselwirkung analog zu (4) durch einen Term

$$H'_3 = i f' (\bar{\psi}_\Lambda \gamma_5 \tau_i \psi_\Lambda) \Phi_i, \quad (8)$$

so vermittelt (8) unter anderem den Übergang eines (virtuellen) Pions in ein  $\Lambda$ -Teilchen und ein entsprechendes Antiteilchen ( $\bar{\Lambda}$ ). Der einfachste Prozeß, der eine  $\Lambda$ -Paarerzeugung ermöglicht, ist die Nukleonenpaarvernichtung, deren Bedeutung allerdings vom Nachweis eines Antiprotons oder Antineutrons abhängt. Das Matrixelement für einen solchen Übergang ergibt sich aus  $H' = (4) + (8)$  zu

$$\langle A(p') \bar{\Lambda}(q') | S_2 | N(p) \bar{N}(q) \rangle = i f f' \int d^4 x d^4 y \Delta_+(x-y) (\bar{\psi}_{-q} \gamma_5 \tau_i \psi_p(x)) \times \\ \times (\bar{\psi}_{p'} \gamma_5 \tau_i \psi_{-q'}(y)).$$

Daraus folgt ein totaler Erzeugungsquerschnitt von

$$\sigma_{\Lambda} = \pi (f f' / 4\pi)^2 (\tau_N \tau_{\bar{N}})^2 (\kappa + 1) (\kappa + 1 - 2M^2/m^2)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times (\kappa + 1 - \mu^2/2m^2)^{-2} (\kappa - 1)^{-\frac{1}{2}} \lambda_N^2, \quad (9)$$

wo  $\kappa = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$  ( $v$  = Geschwindigkeit des einfallenden Nukleons im L.S.) und  $\lambda_N$  die COMPTON-Wellenlänge des Nukleons bedeutet. Die Schwellenenergie beträgt für diesen Prozeß im L.S.:  $E_{\text{schw}} = m + 779 \text{ MeV}$ .

Über die Größenordnung von  $f'$  geben die Messungen der  $\Lambda$ -Bindungsenergie in  ${}^3\text{H}^1$  und in  $\text{Be}^2$  Auskunft: Die  $\Lambda$ -Bindungsenergie in  ${}^3\text{H}$  ergab sich zu  $(0.9 \pm 1.1) \text{ MeV}$  im Vergleich zu einer Neutronbindungsenergie von  $\sim 6 \text{ MeV}$ . Nehmen wir eine kinetische Energie pro Nukleon in der Größe der FERMI-Energie  $T = 14.7 \text{ MeV}$  an, so wird die potentielle Energie des  $\Lambda$ -Teilchens bzw. Neutrons:  $(-16 \pm 1) \text{ MeV}$  bzw.  $\sim 21 \text{ MeV}$ . Wenn der zu (4) analoge Ansatz von (8) berechtigt ist, so folgt daraus, daß  $f$  und  $f'$  in der gleichen Größenordnung liegen. Für  $(\tau_N \cdot \tau_{\bar{N}}) = 1$  und  $f^2 = f'^2 = 40\pi$  ergibt (9):

$$\sigma_{\Lambda} = 139 \text{ mb } (\kappa + 1) [(\kappa + 1 - 2M^2/m^3)/(\kappa - 1)]^{\frac{1}{2}} (\kappa + 1 - \mu^2/2m^2)^{-2}.$$

Etwa für  $\kappa = 2$  ( $E = 2m$ ) erhalten wir  $\sigma_{\Lambda} = 19,2 \text{ mb}$ .

Im Normalfall wird sich ein Nukleon-Antinukleonpaar in ein Pionpaar umwandeln durch Vermittlung des Paarterms, welcher der Wechselwirkung (4) entspricht:

$$H_2'' = (f^2/2m) (\bar{\psi}_N \psi_N) \Phi_i^2. \quad (10)$$

Das Matrixelement für die Vernichtung eines Nukleons mit dem Energieimpulsvektor  $p$  und eines Antinukleons ( $q$ ) unter Aussendung zweier

<sup>1</sup> BONETTI, A. u. a.: Nuovo Cim. **II**, 210, 230 (1954).

<sup>2</sup> FRY, W. F., u. G. R. WHITE: Nuovo Cim. **II**, 551 (1954).

Pionen ( $k$  und  $k'$ ) lautet nach (10):

$$\langle \pi^+(k) \pi^-(k') | S_1 | N(p) \bar{N}(q) \rangle = -i (f^2/2m) \int d^4x (\bar{\psi}_{-q} \psi_p) \Phi_k^- \Phi_{k'}^+(x).$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ergibt sich daraus zu

$$\sigma_\pi = (\pi/4) (f^2/4\pi)^2 [(\kappa - 1)(\kappa + 1 - 2\mu^2/m^2)]^{\frac{1}{2}} (\kappa + 1)^{-1} \lambda_N^2. \quad (11)$$

Das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte für die Erzeugung eines  $\Lambda$ - bzw.  $\pi$ -Paares beträgt nach (9) und (11):

$$\frac{\sigma_\Lambda}{\sigma_\pi} = 4 \left( \frac{f}{f'} \right)^2 \frac{(\tau_N \cdot \tau_{\bar{N}})^2}{|\kappa - 1| |\kappa + 1 - \mu^2/2m^2|^2} \left[ \frac{\kappa + 1 - 2M^2/m^2}{\kappa + 1 - 2\mu^2/m^2} \right] \quad (12)$$

Für  $f' = f$ ,  $(\tau_N \cdot \tau_{\bar{N}}) = 1$  und  $\kappa = 2$  bedeutet dies numerisch:  $\sigma_\Lambda/\sigma_\pi = 1,04$ . Es würde also ungefähr jedes zweite Nukleonpaar bei seiner Vermehrung ein  $\Lambda$ -Paar erzeugen.

Betrachten wir schließlich den Paarterm, welcher der Wechselwirkung (8) entspricht:

$$H_3'' = (f'^2/2M) (\bar{\psi}_1 \psi_1) \Phi_1^2. \quad (13)$$

(13) vermittelt unter anderem die Erzeugung eines  $\Lambda\bar{\Lambda}$ -Paares durch  $\pi$ -Paarvernichtung. Das Matrixelement niedrigster Ordnung lautet für diesen Prozeß:

$$\langle \Lambda(p') \bar{\Lambda}(q') | S_1 | \pi^+(p) \pi^-(q) \rangle = -i (f'^2/2M) \int d^4x (\bar{\psi}_p \psi_{-q'}) \Phi_p^+ \Phi_{q'}^-(x).$$

Daraus folgt ein totaler Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = (\pi/2) (f'^2/4\pi)^2 (\kappa + 1 - 2M^2/\mu^2)^{\frac{1}{2}} (\kappa + 1)^{-1} (\kappa - 1)^{-\frac{1}{2}} (m/M)^2 \lambda_N^2. \quad (14)$$

Die Schwellenenergie liegt sehr hoch:  $E_{\text{schw}} = 2M^2/\mu - \mu = \mu + 17,43 \text{ GeV}$ . Mit  $f'^2 = 40\pi$  wird aus (14):

$$\sigma = 49,1 \text{ mb } (\kappa + 1 - 2M^2/\mu^2)^{\frac{1}{2}} (\kappa + 1)^{-1} (\kappa - 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Das bedeutet z. B. für  $\kappa = 150$  ( $E = 21,09 \text{ GeV}$ ):  $\sigma = 3,33 \text{ mb}$ .

Die drei für  $\Lambda$ -Erzeugung angeführten Mechanismen sind entweder wegen der kleinen Kopplungskonstante oder wegen der hohen Schwellenenergie unwahrscheinlich. ÖNEDA<sup>1</sup> hat versucht, einen größeren Erzeugungsquerschnitt zu erhalten, indem er eine hinreichend starke Wechselwirkung der  $\tau$ -Mesonen mit dem  $N$ - und  $\Lambda$ -Feld annimmt. Es führt aber auch diese Annahme zu Schwierigkeiten. Beschreiben wir das  $\tau$ -Meson durch eine pseudoskalare Feldgröße  $\Phi_\tau$ , so können wir für die  $\Lambda-N-\tau$ -Wechselwirkung folgenden Ansatz machen:

$$H_4' = iG (\bar{\psi}_1 \gamma_5 \tau_1 \psi_N) \Phi_1^* + iG' (\bar{\psi}_N \gamma_5 \tau_1 \psi_N) \Phi_1^*. \quad (15)$$

<sup>1</sup> ÖNEDA, S.: Progr. Theor. Phys. 6, 633 (1951).



Da ein Zerfall des  $\Lambda$ -Teilchens in ein Nukleon und ein  $\tau$ -Meson aus Energiegründen ausgeschlossen ist, so bleibt die Lebensdauer der freien  $\Lambda$ -Teilchen durch (15) unverändert. Durch (15) wird bei Nukleon-Nukleon-Stößen entsprechend Fig. 1 die Erzeugung von  $\Lambda$ -Teilchen vermittelt. (Das ausgetauschte Meson ist nun ein  $\tau$ -Meson.) Die Schwellenenergie ist natürlich die gleiche wie beim ersten Erzeugungsprozeß. Bei einer kinetischen Energie von 2,2 GeV (L.S.) des einfallenden Nukleons beträgt dann der differentielle Wirkungsquerschnitt in der Einfallsrichtung in niedrigster Näherung:

$$d\sigma/d\Omega (\vartheta = 0) = 0,046 \text{ mb } (GG'/4\pi)^2 (\overline{\tau_{N_1} \cdot \tau_{N_2}})^2. \quad (16)$$

(16) gäbe plausible Werte, wenn man  $(G^2/4\pi)$  in der Größenordnung von 1 annehmen könnte. Da aber (15) zum  $\tau$ -freien  $\Lambda$ -Zerfall beiträgt, so wird die von den  $\tau$ -Mesonen vermittelte Zerfallswahrscheinlichkeit der  $\Lambda$ -Teilchen im Kern um den Faktor

$$\left( \frac{GG'}{fg} \cdot \frac{\mu_\tau^2 + m(M-m)}{\mu_\tau^2 + m(M-m)} \right)^2 = 2,2 \cdot 10^{10} \left( \frac{G'}{f} \right)^2 \left( \frac{G^2}{4\pi} \right) \quad (17)$$

größer als 5. Für  $G'f \approx 0,1$  muß  $(G^2/4\pi) \approx 10^{-8}$  sein, damit die  $\Lambda$ -Lebensdauer in der Größenordnung von  $10^{-10}$  sec bleibt. Das bedeutet aber, daß der Beitrag der  $\tau$ -Mesonen zur  $\Lambda$ -Erzeugung sehr klein wird.

Nimmt man an, daß sich die  $\Lambda$ -Feldgröße wie ein Pseudospinor transformiert, so wird

$$H'_1 = g (\bar{\psi}_N \tau_i \psi_\Lambda) \Phi_i \quad (1')$$

und die Zerfallswahrscheinlichkeit für ein freies, ruhendes  $\Lambda$ -Teilchen:

$$\left. \begin{aligned} w(\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-) \\ = (g^2/4\pi) [(M^2 + m^2 - \mu^2)^2 (2M)^{-2} - m^2]^{\frac{1}{2}} [(M+m)^2 - \mu^2] (2M)^{-2}; \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

dies bedeutet, daß

$$(g^2/4\pi) = 0,26 \cdot 10^{-13} \quad (3')$$

wird. Für das Verhältnis der Zerfallswahrscheinlichkeiten gebundener und freier  $\Lambda$ -Teilchen ergibt sich

$$\frac{w}{w_\pi} = \frac{1}{4} \cdot \frac{f^2}{4\pi} \frac{\overline{(\tau_{\Lambda^0} \cdot \tau_N)^2}}{\overline{(\tau_{\Lambda^0} \cdot \tau_N)^2}} \cdot \frac{M-m}{M+m} \cdot \frac{(M+3m)M^2\mu^3}{[(M+m)^2 - \mu^2][\mu^2 + m(M-m)]^2} \sqrt{\frac{(M+m)^2 - 4m^2}{(M^2 + m^2 - \mu^2)/M^2 - 4m^2}}.$$

Numerisch bedeutet dies:

$$w/w_\pi = 0,305 (f^2/4\pi) (\overline{\tau_\Lambda \cdot \tau_N})^2 \quad (6')$$

(6) unterscheidet sich von (6') um den Faktor

$$(M-m) [(M+m)^2 - \mu^2] \{3(M+3m) [(M-m)^2 - \mu^2]\}^{-1} = 5,35.$$

Der schnellere Zerfall des gebundenen  $\Lambda$ -Teilchens nach der Spinortheorie im Vergleich zur Pseudospinortheorie könnte vielleicht bei einer größeren Zerfallsstatistik zwischen beiden Theorien entscheiden. Der  $\Lambda$ -Erzeugungsquerschnitt beim Stoß zweier Nukleonen (vgl. Fig. 1) wird in der Vorwärtsrichtung für eine kinetische Energie von 2,2 GeV

$$d\sigma/d\Omega (\vartheta = 0) = 0,79 \cdot 10^{-13} \text{ mb } (f^2/4\pi) (\overline{\tau_{N_1} \cdot \tau_{N_2}})^2.$$

Der Wirkungsquerschnitt für die  $\Lambda$ -Erzeugung durch Vermittlung der  $\tau$ -Mesonen wird

$$d\sigma/d\Omega (\vartheta = 0) = 0,216 \text{ mb } (GG'/4\pi)^2 (\overline{\tau_{N_1} \cdot \tau_{N_2}})^2. \quad (16')$$

Der Faktor (17) geht über in

$$0,77 \cdot 10^{13} (G'/f)^2 (G^2/4\pi), \quad (17')$$

so daß auch nach der Pseudospinortheorie  $G$  sehr klein sein müßte:  $(G^2/4\pi) \approx 10^{-11}$ .

Für die pseudovektorielle Kopplung

$$H'_1 = g \left( \frac{1}{(M+m)} \right) (\psi_N^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{\tau}_1 \psi_1) \Gamma \Phi, \quad (1'')$$

erhalten wir

$$w_\pi = (g^2/4\pi) q^3 (2M)^{-2} [1 - \mu^2 (M+m)^{-2}], \quad (2'')$$

wo  $q^2 = (M^2 + m^2 - \mu^2)^2 (2M)^{-2} - m^2$ . Daraus folgt mit  $w^{-1} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ sec}$ :

$$(g^2/4\pi) = 1,11 \cdot 10^{-11}, \quad (3'')$$

also ein Wert, der im wesentlichen mit (3) übereinstimmt, wie auf Grund des Äquivalenztheorems zu erwarten ist, während sich in der Näherung von CHESTON und PRIMAKOFF  $(g^2/4\pi) = 0,31 \cdot 10^{-11}$  ergibt.

Göttingen, Max-Planck-Institut für Physik.

## Zur Statistik der Elektronenlawinen.

Von

WERNER LEGLER.

Mit 11 Figuren im Text.

(Eingegangen am 19. November 1954.)

Die statistischen Probleme der Elektronenlawinen und der raumladungsfreien TOWNSEND-Entladung werden untersucht. Ausgehend von der statistischen Verteilung der Lawinengröße, die auf einfache Weise abgeleitet wird, wird die Struktur der einzelnen Lawinen und die Verteilung der Nachlieferungselektronen (durch positive Ionen und durch Photoeffekt) berechnet. In der Umgebung von  $\mu = \gamma \cdot (e^{\alpha d} - 1) = 1$  treten mit merklicher Wahrscheinlichkeit Lawinenketten auf. Die zeitliche Folge der Generationen, die Verteilung der Generationenzahl und die Struktur dieser Lawinenketten werden untersucht. Dabei werden besonders die durch ein einzelnes Primärelektron ausgelösten Ketten behandelt. Ist  $\mu > 1$ , so kann ein einzelnes Elektron mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - 1/\mu$  die Zündung der Entladung herbeiführen. Das erste Anwachsen dieser zündenden Entladung wird näher untersucht und daraus die statistische Verteilung der Aufbauzeit abgeleitet.

### I. Einleitung.

Beim Aufbau einer Gasentladung aus einem *einzelnen* an der Kathode startenden Elektron ist es nicht zweckmäßig, nur mit den statistischen Mittelwerten der Gasverstärkung und Elektronennachlieferung zu rechnen. Daß diese Rechnungen dann insbesondere in der Umgebung der statischen Zündspannung der Gasentladung zu falschen Ergebnissen führen müssen, zeigt folgendes Beispiel: An eine Entladungsstrecke wird eine solche Spannung gelegt, daß sich ein Rückwirkungsfaktor  $\mu = 1,08$  ergibt.  $\mu = \gamma \cdot (e^{\alpha d} - 1) = 1,08$  bedeutet, daß jede Elektronenlawine im Mittel 1,08 Elektronen an der Kathode auslöst, die wieder zu neuen Lawinen anwachsen. Erfolgt der Aufbau der Entladung in Ionisationsspielen (TOWNSEND-Aufbau), so würde die primitive Rechnung mit den Mittelwerten zu folgenden Aussagen führen: Jedes von der Kathode startende Elektron führt zur Zündung der Entladung. In der zehnten Generation laufen im Mittel  $\mu^{10} = 2$  Lawinen, in der hundertsten Generation  $\mu^{100} = 2000$  Lawinen. Wie im folgenden gezeigt wird, ergibt die Berücksichtigung der statistischen Verteilungen dagegen die Aussagen: Von den an der Kathode startenden Elektronen führen 7,4% zur Zündung der Entladung. Im Falle der Zündung laufen in der zehnten Generation im Mittel 21, in der hundertsten Generation im Mittel 27 500 Lawinen.

Die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein einzelnes Elektron die Zündung einer Entladungsstrecke bewirkt, wurde von BRAUNER<sup>1</sup>,

HERTZ <sup>2</sup> und WIJSMAN <sup>3</sup> behandelt. Dabei rechneten BRAUNBEK und HERTZ noch mit der mittleren Lawinengröße  $e^{\alpha d}$  und berücksichtigten nur die Streuung im Nachlieferungsprozeß. WIJSMAN stellte auch die nicht unerhebliche Streuung der Lawinengröße in Rechnung. Für die Zündwahrscheinlichkeit  $W$  der Entladung durch ein einzelnes von der Kathode startendes Elektron erhält HERTZ die Beziehung  $1 - W = e^{-\alpha W}$ , während WIJSMAN die Darstellung  $W = 1 - \frac{1}{\mu}$  angibt. Fig. 1 zeigt deut-

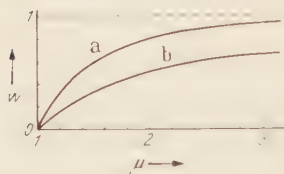


Fig. 1. Wahrscheinlichkeit  $W$  für die Zündung einer Townsend-Entladung durch ein einzelnes Elektron als Funktion von  $\mu = \gamma(e^{\alpha d} - 1)$ . Kurve  $a$  nach <sup>2</sup> ohne Berücksichtigung der Lawinenstreuung.

lich den Einfluß der Lawinenstreuung, die hier zu kleineren Zündwahrscheinlichkeiten führt.

In der vorliegenden Arbeit werden auf Grund der statistischen Verteilung der Lawinengröße und der Anzahl der Nachlieferungselektronen einer Lawine folgende Vorgänge genauer statistisch beschrieben. Der Aufbau der Elektronenlawine, die Struktur von Lawinenketten und die Entwicklung der TOWNSEND-Entladung.

## II. Verteilung der Lawinengröße.

Startet in einer Gasentladungsstrecke von der Kathode ein Elektron, so wird bei genügend hoher elektrischer Feldstärke durch fortgesetzte Stoßionisation im Gas eine Lawine von insgesamt  $n$  Elektronen an der Anode ankommen. Die Zahl  $n$  wird als „Lawinengröße“ bezeichnet. Unter gewissen Voraussetzungen kann die Wahrscheinlichkeit  $W(n, d)$  berechnet werden, daß ein Elektron eine Lawine von  $n$  Elektronen erzeugt, wenn es die Strecke  $d$  in Feldrichtung zurücklegt. Diese Voraussetzungen sind:

1. Das elektrische Feld ist eine reine Ortsfunktion und wird nicht durch die Raumladung der Lawine verzerrt. Dann ist nämlich die Ionisierungswahrscheinlichkeit eines Elektrons unabhängig von den anderen gleichzeitig laufenden Elektronen. Diese Forderung beschränkt die maximal zulässige Lawinengröße (je nach den Entladungsbedingungen ist  $n_{\max}$  etwa  $10^6$  bis  $10^7$ ).

2. Die Ionisierungswahrscheinlichkeit der Elektronen soll nur eine Funktion der am Orte der Elektronen herrschenden Feldstärke sein und nicht von dem seit der letzten Ionisation zurückgelegten Weg abhängen.

Um diese Bedingung zu erfüllen, muß das Feld relativ homogen sein, da die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen und damit ihre Ionisierungswahrscheinlichkeit wesentlich von der Feldstärke abhängt, die kurz vorher auf die Elektronen eingewirkt hat. Nach Messungen von MORTON <sup>4</sup> darf die Feldinhomogenität im Zylinderfeld dann nicht mehr



vernachlässigt werden, wenn die Änderung der Feldstärke längs einer freien Weglänge mehr als 1 bis 2% ausmacht. Dies kann bei Zählrohren der Fall sein.

Da ein Elektron nach einer Ionisation im allgemeinen nur noch eine Energie besitzt, die klein gegen die Ionisationsenergie  $e \cdot U_i$  ist, so muß es erst etwa einen Weg  $s = U_i/E$  in Feldrichtung zurücklegen, um erneut ionisieren zu können. Soll es für die Rechnung berechtigt sein, die Ionisierungswahrscheinlichkeit als unabhängig von dem seit der letzten Ionisation zurückgelegten Weg anzusehen, so muß jedenfalls  $s$  klein gegenüber der mittleren Ionisationsweglänge  $1/\alpha$  sein. Es muß also  $E/\alpha \gg U_i$  sein. In Fig. 2 ist  $E/\alpha$  als Funktion von  $E/p$  für Luft und Argon dargestellt. In Luft wird z. B.  $E/p$  kleiner als  $100 \text{ V/cm} \cdot \text{Torr}$  sein müssen, damit  $E/\alpha$  groß gegen  $U_i$  wird. Das bedeutet aber, daß für den Aufbau bei kleinen  $p \cdot d$ -Werten ( $p \cdot d < 10 \text{ cm} \cdot \text{Torr}$ ) diese Rechnungen nur mit Vorsicht anwendbar sind, da für kleinere  $p \cdot d$ -Werte die zur Zündung notwendigen  $E/p$ -Werte sehr rasch ansteigen.

Unter diesen Voraussetzungen (1 und 2) erzeugt ein Elektron auf dem Wegdifferential  $dx$  in Feldrichtung mit der Wahrscheinlichkeit  $\alpha \cdot dx$  ein weiteres Elektron durch Stoßionisation und  $\alpha$  ist nur vom Orte abhängig. Die Lawinengröße  $n$  unterliegt dann folgender Verteilung:

#### Exakte Verteilung

$$v(n, d) = \frac{1}{n_0} \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^{n-1}$$

Mittelwert:

$$\bar{n} = n_0 = \exp \int_0^d \alpha(x) \cdot dx$$

Streuung:

$$\sigma = n_0 \cdot \sqrt{1 - 1/n_0}$$

#### Näherung für $n_0 \gg 1$

$$v(n, d) = \frac{1}{n_0} \cdot e^{-n/n_0}$$



$$\sigma = n_0.$$

(1)

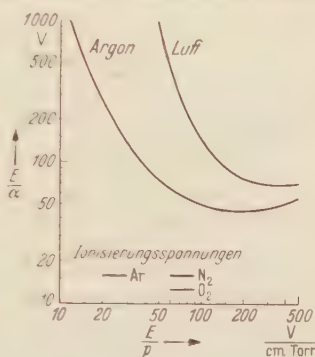


Fig. 2. Mittlere Energieaufnahme  $E/\alpha$  eines Elektrons zwischen zwei Ionisationen in Abhängigkeit von  $E/p$  für Luft,  $N_2$  und Argon [6]. Ionisierungsspannungen zum Vergleich.

#### Kurze Ableitung der Verteilung.

$v(n, x)$  ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron beim Durchlaufen der Strecke  $x$  in Feldrichtung eine Lawine von insgesamt  $n$  Elektronen erzeugt. Berechnung von  $v(n, x + dx)$ : Für die Erzeugung einer Lawine von  $n$  Elektronen auf der Strecke  $x + dx$  gibt es genau zwei einander ausschließende Möglichkeiten.

Einmal durchläuft das Elektron mit der Wahrscheinlichkeit  $(1 - \alpha \cdot dx)$  die Strecke  $dx$  ohne zu ionisieren und führt dann mit der Wahrscheinlichkeit  $v(n, x)$  auf der Strecke  $x$  zu einer Lawine von  $n$  Elektronen. Im anderen Falle erzeugt das Elektron zunächst mit der Wahrscheinlichkeit  $\alpha \cdot dx$  in  $dx$  ein zweites Elektron. Auf der anschließenden Strecke  $x$  bildet das eine Elektron eine Lawine von  $k$  Elektronen, das andere eine von  $n - k$  Elektronen. Die Wahrscheinlichkeit, daß beide Elektronen auf der Strecke  $x$  zwei Lawinen von insgesamt  $n$  Elektronen hervorbringen, ist also  $\sum_{k=1}^{n-1} v(k, x) \cdot v(n - k, x)$ . Somit wird

$$v(n, x + dx) = (1 - \alpha dx) \cdot v(n, x) + \alpha dx \cdot \sum_{k=1}^{n-1} v(k, x) \cdot v(n - k, x)$$

oder

$$\frac{d}{dx} v(n, x) = -\alpha \cdot v(n, x) + \alpha \sum_{k=1}^{n-1} v(k, x) \cdot v(n - k, x). \quad (2)$$

Die Lösung dieses Differentialgleichungssystems gelingt durch Einführung der erzeugenden Funktion

$$V(t, x) = \sum_n v(n, x) \cdot t^n.$$

Für  $V(t, x)$  erhält man nach (2) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \alpha \cdot V(V - 1).$$

Mit den Anfangsbedingungen  $v(1, 0) = 1$ ,  $v(n, 0) = 0$  für  $n \neq 1$ , also  $V(t, 0) = t$  erhält man die Lösung

$$V(t, d) = \frac{1}{n_0} \cdot \frac{t}{1 - (1 - \frac{1}{n_0}) \cdot t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n_0} \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^{n-1} \cdot t^n.$$

Dabei wurde zur Abkürzung  $\exp \int_0^d \alpha(x) \cdot dx = n_0$  gesetzt. Durch Koeffizientenvergleich erhält man sofort die oben angegebene Verteilung (1).

Für die weiteren Rechnungen wird die Näherungsdarstellung (1) für  $n_0 \gg 1$  benutzt, die im folgenden als „ideale“ Verteilung bezeichnet wird.

Eine ähnliche Verteilung findet man bei den Ausgangsimpulsen von Sekundärelektronen-Vervielfachern. Der Stoßionisation im Gas entspricht hier die Sekundärelektronenauslösung an den Dynoden des Vervielfachers [17].

In manchen Fällen ist es zweckmäßig, die Streuung der Lawinengröße als Streuung eines fiktiven Ionisationskoeffizienten  $\alpha^*$  aufzufassen, der durch  $n = e^{\alpha^* d}$  definiert ist. Daneben sei  $n_0 = e^{\alpha_0 d}$ . (Im homogenen Feld ist  $\alpha_0 = \alpha$ .) Sei  $W$  die Wahrscheinlichkeit, mit der  $\alpha^*$  in ein Intervall  $d\alpha^*$  fällt, so ist mit  $d n = d \cdot e^{\alpha^* d} \cdot d\alpha^*$

$$W = \frac{1}{n_0} \cdot e^{-n/n_0} \cdot dn = d \cdot d\alpha^* \cdot \exp \{(\alpha^* - \alpha_0) d - e^{(\alpha^* - \alpha_0) d}\}.$$

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte  $w = W/d \cdot d\alpha^*$  erhält man (s. auch Fig. 3)

$$w = \exp \{(\alpha^* - \alpha_0) d - e^{(\alpha^* - \alpha_0) d}\}. \quad (3)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Lawine mit ihrem  $\alpha^* d$  den Wert  $\alpha_0 d$  um mehr als  $A$  überschreitet, ist durch das Integral  $\int_{\alpha_0 d + A}^{\infty} \alpha \cdot d(\alpha^* d)$  gegeben. So findet man z. B. für  $A = 2$  bzw.  $3$  die Wahrscheinlichkeiten  $0,6 \cdot 10^{-3}$  bzw.  $2 \cdot 10^{-9}$ .

Der fiktive Ionisationskoeffizient  $\alpha^*$  darf aber nicht so interpretiert werden, daß sich im ebenen Feld eine Lawine der Größe  $n = e^{\alpha^* d}$  nach dem Gesetz  $n(x) = e^{\alpha^* x}$  aus einem Elektron aufbaut. Diese Frage des Aufbaus behandelt der nächste Abschnitt.

### Die Struktur der Lawinen.

Die bekannte Formel für die Trägervermehrung in einer Elektronenlawine

$$dn = n \cdot \alpha \cdot dx \quad n = e^{\alpha x}$$

ist für kleine  $n$  sicher nicht exakt gültig, sondern stellt nur eine Mittelwertsaussage dar. Aus dem vorhergehenden ist bekannt, daß die Lawinengröße  $n$  einer starken Streuung um den Mittelwert  $n_0 = e^{\alpha_0 d}$  unterworfen ist. Welches Aufbaugesetz gilt für eine Lawine, die aus insgesamt  $n$  Elektronen bestehen wird? Die genaue Antwort auf diese Frage kann natürlich nur in Form einer Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben werden.

Es sei  $W_n(n_1, x)$  die Wahrscheinlichkeit, daß eine Lawine, die aus insgesamt  $n$  Elektronen bestehen wird, an der Stelle  $x$  schon  $n_1$  Elektronen umfaßt. Bei der Ableitung der Verteilung wird vorausgesetzt, daß  $n$  groß gegen  $n_1$  ist.

Bezeichnen wir mit  $v(n_1, x)$  die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein Elektron auf dem Wege  $x$  auf  $n_1$  Elektronen vermehrt hat und mit  $v(n_1, n, d-x)$  die Wahrscheinlichkeit, daß sich  $n_1$  Elektronen auf der Strecke  $(d-x)$  auf  $n$  Elektronen vermehren. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Lawine von  $n$  Elektronen an der Stelle  $x$  aus  $n_1$  Elektronen bestand, ist dann

$$W_n(n_1, x) = \frac{v(n_1, x) \cdot v(n_1, n, d-x)}{\sum_{n_1=1}^{\infty} v(n_1, x) \cdot v(n_1, n, d-x)}. \quad (4)$$

Für  $v(n_1, x)$  legen wir die exakte Lawinenverteilung [s. Gl. (1)] zugrunde

$$v(n_1, x) = e^{-\alpha x} (1 - e^{-\alpha x})^{n_1-1}. \quad (5)$$

Für die Darstellung von  $v(n_1, n, d-x)$  benutzen wir die Näherung für  $n_0 \gg 1$  in Gl. (1). Dies ist wegen  $n_1 \ll n$  berechtigt. Die Lawine von  $n$  Elektronen kann als Summe von  $n_1$  an der Stelle  $x$  startender Teillawinen aufgefaßt werden, wobei jede einzelne der Verteilung

$$v(n_1, d-x) = e^{-\alpha(d-x)} \cdot \exp(-n_1 \cdot e^{-\alpha(d-x)}) \quad (6)$$

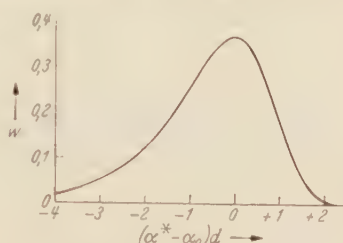


Fig. 3. Verteilung des fiktiven Ionisationskoeffizienten  $\alpha^*$  einer Lawine.

unterworfen ist. Für die Verteilung der Summe  $n$  gilt dann<sup>1</sup>

$$v(n_1, n, d-x) = e^{-\alpha(d-x)} \cdot \frac{(n \cdot e^{-\alpha(d-x)})^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \cdot \exp(-n \cdot e^{-\alpha(d-x)}). \quad (7)$$

Setzt man nun die Verteilungen (5) und (7) in die Gl. (4) ein, so erhält man

$$W_n(n_1, x) = \frac{A^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \cdot e^{-A}. \quad (8)$$

Dabei wurde zur Abkürzung

$$A = \frac{n}{n_0} (e^{\alpha x} - 1) \quad (9)$$

gesetzt. Für die Darstellung der Lawnenstruktur wählen wir den Mittelwert von  $n_1$ . Dieser ergibt sich zu

$$\bar{n}_1(x) = A + 1 = \frac{n}{n_0} \cdot e^{\alpha x} + \left(1 - \frac{n}{n_0}\right). \quad (10)$$

In Fig. 4 ist dieser mittlere Entwicklungsgang einer Lawine für verschiedene Werte von  $n/n_0$  dargestellt.

Schreibt man die Gl. (10) in der Form

$$\bar{n}_1(x) - 1 = \frac{n}{n_0} (e^{\alpha x} - 1), \quad (10a)$$

so erkennt man sofort die Näherungsdarstellung

$$\bar{n}_1(x) \approx \frac{n}{n_0} \cdot e^{\alpha x}, \quad (11)$$

die dann gültig ist, wenn sowohl  $\bar{n}_1(x)$  als auch  $e^{\alpha x}$  groß gegen 1 ist. Die hier

für das ebene Feld gegebene Darstellung überträgt sich auf das inhomogene Feld, wenn man  $\alpha \cdot x$  durch  $\int_0^x \alpha(\xi) \cdot d\xi$  ersetzt.

#### Gemessene Lawinenverteilung.

Eine Messung der Verteilung der Lawinengröße liegt vor von S. C. CURRAN, A. L. COCKROFT und J. ANGUS [7]. Es wurde die Impulsverteilung eines Proportionalzählrohrs bei Lichtemstrahlung gemessen (Daten des Zählrohrs: Drahtdurchmesser etwa 0,15 mm, Gasfüllung 250 Torr Argon + 250 Torr Methan, Spannung 3550 V.). Die maximale Feldinhomogenität (Änderung der Feldstärke auf eine freie Elektronenweglänge) beträgt etwa 1%. Die mittlere Gasverstärkung wird zu  $1,40 \cdot 10^3 \approx e^{12}$  angegeben. Bei einer Änderung der Spannung um 105 V wurde eine Änderung der Gasverstärkung um den Faktor 2 festgestellt

<sup>1</sup> Siehe Anhang 1.

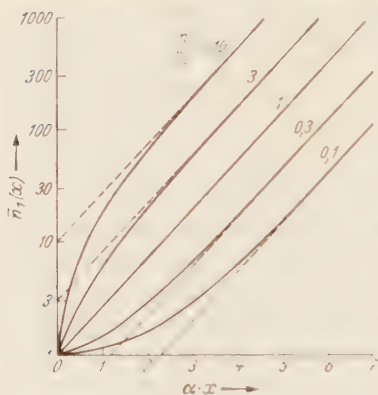


Fig. 4. Der mittlere Entwicklungsgang einer Lawine für verschiedene Werte von  $n/n_0$ .

Nimmt man für  $\alpha$  eine Feldstärkenabhängigkeit der Form  $\alpha = A \cdot e^{-B/E}$  an, so kann aus den obigen Angaben der Wert von  $E \cdot \alpha$  näherungsweise berechnet werden. Für die Umgebung des Drahtes, in der der wesentliche Teil der Verstärkung stattfindet, ergibt sich  $E \cdot \alpha = 60$  bis  $100$  V. Die Bedingung  $E \cdot \alpha \geq U$  ist also nicht gut erfüllt. Fig. 5 zeigt die gemessene und die entsprechende ideale Verteilung. Die letztere wurde unter Zugrundelegung des experimentellen Mittelwertes  $n_0 = 1,46 \cdot 10^5$  gezeichnet. Wesentliche Abweichungen der beiden Kurven voneinander findet man nur für Lawinen, die kleiner als  $n_0/3$  sind. Ob diese Abweichungen auch auftreten, wenn die Voraussetzungen 1 und 2 der theoretischen Verteilung besser erfüllt sind, muß noch experimentell geklärt werden.

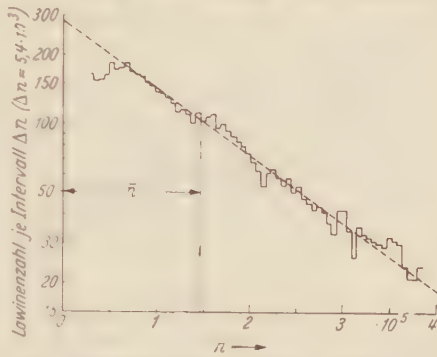


Fig. 5. Vergleich der idealen Lawinenverteilung (-----) mit Messungen am Proportionalzählrohr. Meßwerte nach CURRAN u. a. [7].

### III. Verteilung der Nachlieferungselektronen.

Für diese Rechnungen werden nur solche Nachlieferungsprozesse betrachtet, bei denen die Elektronen an der Kathode erzeugt werden (gasionisierende Strahlung z.B. ist also ausgeschlossen). Ob nun die Nachlieferung durch positive Ionen, metastabile Atome bzw. Moleküle oder durch Photoeffekt an der Kathode erfolgt, stets handelt es sich um eine große Anzahl von Elementarprozessen, wobei jeder mit der (sehr kleinen) Wahrscheinlichkeit  $\delta$  ein Elektron an der Kathode auslösen kann. Die Anzahl  $p$  der Elementarprozesse sei der Elektronenzahl  $n$  der Lawine proportional. Die Wahrscheinlichkeit, daß durch eine Lawine  $k$  Nachlieferungselektronen ausgelöst werden, ist also

$$w(n, k) = \binom{p}{k} \cdot \delta^k (1 - \delta)^{p-k}. \quad (12)$$

Da  $p \gg 1$  und  $\delta \ll 1$ , ist (12) in guter Näherung eine Poisson-Verteilung

$$w(n, k) = \frac{(\delta \cdot p)^k}{k!} \cdot e^{-\delta p}. \quad (13)$$

Wegen der Proportionalität zwischen  $n$  und  $p$  gilt

$$w(n, k) = \frac{(\gamma \cdot n)^k}{k!} \cdot e^{-\gamma n}. \quad (14)$$



Dabei ist  $\gamma$  die Anzahl der im Mittel pro Lawinenelektron ausgelösten Nachlieferungselektronen. Diese Verteilung gilt sowohl für Rückwirkung nur einer Art (z. B. nur durch Ionen), als auch für gemischte Rückwirkung (z. B. Ionen und Photonen). Dann ist in Formel (14) einzusetzen:  $\gamma = \gamma_{\text{Ionen}} + \gamma_{\text{Photonen}}$ . Dies ist sofort durch Berechnung von

$$w(n, k) = \sum_{v=0}^k w_{\text{Ionen}}(n, v) \cdot w_{\text{Photonen}}(n, k-v)$$

zu verifizieren.

Ist nun die statistische Verteilung der Lawinengröße  $n$  durch Angabe der Wahrscheinlichkeiten  $v(n)$  gegeben, so ist die Wahrscheinlichkeit  $\omega_k$ ,

daß eine beliebige Lawine  $k$  Nachlieferungselektronen auslöst, zu ermitteln gemäß

$$\left. \begin{aligned} \omega_k &= \sum_{n=1}^{\infty} v(n) \cdot w(n, k) \\ &\approx \int_0^{\infty} v(n) \cdot w(n, k) \cdot dn. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

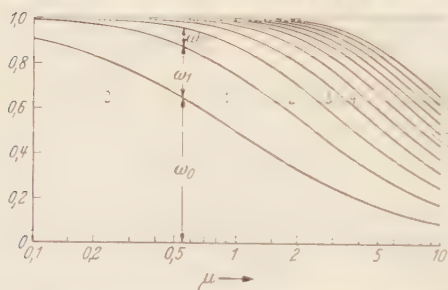


Fig. 6. Verteilung der Nachlieferungselektronen einer Lawine in Abhängigkeit von  $\mu = \gamma \cdot e^{\alpha_d}$ . Die Wahrscheinlichkeiten  $\omega_k$  für  $k$  Nachlieferungselektronen sind übereinander aufgetragen.

Verteilung der Nachlieferungselektronen einer Lawine, wie sie bereits für Nachlieferung durch positive Ionen angegeben wurde [3].

$$\omega_k = \frac{\mu^k}{(1-\mu)^{k+1}}. \quad (16)$$

$\omega_0$  hat bei  $\mu = 0$  den Wert 1 und geht mit wachsendem  $\mu$  monoton gegen Null. Die übrigen  $\omega_k$  haben ein flaches Maximum bei  $\mu = k$ . Für große  $\mu$  ist die Verteilung sehr breit, denn  $\omega_{k+1}$  ist nur sehr wenig von  $\omega_k$  verschieden.

Wie man leicht zeigt, ist  $k = \mu$ , d. h. eine Lawine löst im Mittel  $\mu$  Nachlieferungselektronen aus.

#### IV. Lawinenketten.

Kommt die mittlere Anzahl der Nachlieferungselektronen einer Lawine in die Größenordnung von 1, so treten mit merklicher Wahrscheinlichkeit Lawinenketten auf. Dabei lösen die primär startenden Elektronenlawinen eine Schar von Nachlieferungselektronen aus, welche ihrerseits wieder Nachfolger haben usw. Es bildet sich eine Lawinkette, die aus einer ganzen Reihe von „Generationen“ bestehen kann. Ist  $\mu > 1$ , so wird die Kette mit einer von Null verschiedenen Wahr-

scheinlichkeit nicht abreißen und somit zum Durchschlag der Entladungsstrecke führen. Nach der Anzahl  $N_0$  der Primärelektronen unterscheiden wir Makroketten ( $N_0 > 1$ ) und Mikroketten. Bei letzteren werden wir speziell den Fall  $N_0 = 1$  betrachten. Die Entwicklung der Makroketten bildet kein besonderes statistisches Problem, da hier sehr gut mit Mittelwerten gerechnet werden kann. Die Lawinenzahl der  $n$ -ten Generation ist dann einfach  $N_0 \cdot \mu^{n-1}$ . Derartige Ketten wurden von LAUER [8] beobachtet. Eine Frage, die sowohl Makroketten als auch Mikroketten betrifft, ist die zeitliche Folge der Generationen und deren Streuung.

### A. Die zeitliche Folge der Generationen.

Zur Zeit  $t=0$  mögen  $N_0$  Elektronen von der Kathode der ebenen Entladungsstrecke starten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit  $dW$  wird in dem Zeitraum  $t \dots t + dt$  ein Nachlieferungselektron an der Kathode ausgelöst?

a) *Nachlieferung durch Photoeffekt.* Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß nur ein Energiezustand durch Elektronenstoß angeregt werden kann. Die mittlere Lebensdauer des Zustandes sei  $\tau_1$ . Werden in der Zeitspanne  $t' \dots t' + dt'$  in der Entladungsstrecke  $n(t') \cdot dt'$  Moleküle angeregt, so werden von diesen Molekülen in der Zeit  $t \dots t + dt$

$$n(t') dt' \cdot e^{-(t-t')/\tau_1} \frac{dt}{\tau_1} \quad (17)$$

ein Photon emittieren und in den Grundzustand zurückkehren. Insgesamt werden also im Intervall  $dt$

$$\frac{dt}{\tau_1} \cdot e^{-t/\tau_1} \int_0^t n(t') \cdot e^{t'/\tau_1} dt' \quad (18)$$

Photonen emittiert. Dieser Photonenzahl ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $dW$  proportional, wenn die Absorption im Gas zu vernachlässigen ist. Da die Zahl der anregenden Stöße  $n(t') \cdot dt'$  der Anzahl der zur Zeit  $t'$  laufenden Elektronen — das sind  $N_0 \cdot e^{\alpha d \cdot t'/\tau_-}$ , wo  $\tau_-$  die Elektronenlaufzeit ist — proportional ist, gilt

$$dW \sim e^{-t/\tau_1} dt \cdot \int_0^{\text{Min}(t, \tau_-)} [\exp(\alpha d/\tau_- + 1/\tau_1) t'] dt'. \quad (19)$$

Insgesamt werden  $N_0 \cdot \mu_f$  Nachlieferungselektronen ausgelöst. Die auf 1 normierte Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(t)$  wird definiert durch

$$dW = f(t) \cdot N_0 \cdot \mu_p \cdot dt \quad (20)$$

und es ist wegen (19)

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\tau_0 (e^{\alpha d} - 1)} \cdot (e^{\alpha d \cdot t/\tau_-} - e^{-t/\tau_1}) & \text{für } 0 \leq t \leq \tau_- \\ \frac{1}{\tau_0 (e^{\alpha d} - 1)} \cdot (e^{\alpha d} - e^{-\tau_-/\tau_1}) \cdot e^{-(t-\tau_-)/\tau_1} & \text{für } t > \tau_- \end{array} \right\} \quad (21)$$

Dabei wurde  $\tau_-/\alpha d + \tau_1 = \tau_0$  gesetzt. Da im allgemeinen  $e^{\alpha d} \gg 1$  ist, kann (21) noch vereinfacht werden:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_0} \cdot e^{-\frac{\tau_-}{\tau_0 \alpha d} t} & \text{für } 0 \leq t \leq \tau_- \\ \frac{1}{\tau_0} \cdot e^{-\frac{t - \tau_-}{\tau_1}} & \text{für } t > \tau_- \end{cases} \quad (22)$$

Diese Verteilung ist in Fig. 7 schematisch dargestellt. Der Mittelwert  $\tau$  der Verteilung liegt bei

$$\tau = \tau_- (1 - 1/\alpha d) + \tau_1. \quad (23)$$

Dies ist der mittlere zeitliche Abstand zweier aufeinanderfolgender Lawinengenerationen. Er kann unter Umständen erheblich von der

Elektronenlaufzeit  $\tau_-$  abweichen, da  $\tau_1$  etwa  $10^{-8}$  sec beträgt und damit besonders bei kleinem  $d$  mit  $\tau_-$  vergleichbar ist.

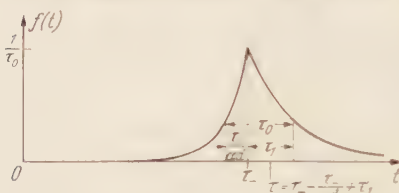


Fig. 7. Zeitliche Verteilung der Wahrscheinlichkeit für die Auslösung von Nachlieferungselektronen durch Photoeffekt.

Für die mittlere Streuung  $\sigma$  der Verteilung findet man

$$\sigma^2 = (\tau_-/\alpha d)^2 + \tau_1^2. \quad (24)$$

Für die Streuung  $\sigma_n$  der  $n$ -ten Generation gilt  $\sigma_n^2 = n \cdot \sigma^2$ . Diese

wachsende Streuung bedeutet, daß die Lawinen einer Generation zeitlich immer mehr auseinanderlaufen. Wird diese mittlere Streuung größer als  $\tau$ , so können die einzelnen Generationen nicht mehr voneinander getrennt werden. Die Anzahl der etwa noch zu trennenden Generationen ist

$$n = \frac{\tau^2}{\sigma^2} = \frac{(\alpha d - 1 + \beta)^2}{1 - \beta^2} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{\tau_1}{\tau_-/\alpha d}. \quad (25)$$

Ist  $\beta \ll 1$ , so gilt  $n = (\alpha d - 1)^2$ , d. h.  $n$  kann von der Größenordnung 100 werden. Bei  $\beta = 1$  ist immerhin noch  $n = \frac{1}{2} (\alpha d)^2$  um erst bei  $\beta = \alpha d$  auf etwa  $n = 4$  abzusinken.

b) *Nachlieferung durch Ionen.* Die Wahrscheinlichkeit für die Auslösung eines Nachlieferungselektrons ist proportional zu der jeweils an der Kathode ankommenden Ionenzahl. Unter Vernachlässigung der Diffusion kommen in der Zeit  $dt$

$$dN = \alpha d \cdot N_0 \cdot e^{\alpha d} \cdot \tau_+ \cdot \tau_- \cdot \frac{dt}{\tau_+ + \tau_-} \quad (26)$$

Ionen an. Dabei ist  $\tau_+$  die Ionenlaufzeit. Mit  $dW = f(t) \cdot N_0 \cdot \mu_+ \cdot dt \sim dN$  folgt für die auf 1 normierte Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\alpha d}{\tau_+ + \tau_-} \cdot e^{-\frac{t - \tau_+}{\tau_-}} & \text{für } 0 \leq t \leq \tau_+ + \tau_- \\ 0 & \text{für } t > \tau_+ + \tau_- \end{cases} \quad (27)$$

Diese Verteilung ist der für Photonnachlieferung gefundenen ähnlich. Es ist dort nur  $\tau_-$  und  $\tau_1$  durch  $\tau_- + \tau_+$  bzw. 0 zu ersetzen. Für die entsprechenden Mittelwerte erhält man also

$$\tau = (\tau_+ + \tau_-)(1 - 1/\alpha d) \approx \tau_+(1 - 1/\alpha d)$$

$$\sigma = \frac{\tau_+ + \tau_-}{\alpha d} \approx \frac{\tau_+}{\alpha d}.$$

Die Anzahl der noch zu trennenden Generationen wird  $n = (\alpha d - 1)^2$ .

Aus diesen Rechnungen folgt, daß bei einem Gasentladungsaufbau über viele Generationen hinweg (TOWNSEND-Aufbau oder Mehrlawinen-Kanalaufbau) die Struktur dieser Generationen zumindest über 10 bis 100 Generationen merklich bleibt und dann langsam verschmiert wird.

### B. Mikroketten.

Wie bereits erwähnt sollen hier nur Mikroketten mit  $N_0=1$  betrachtet werden, d.h. es wird immer nur ein Elektron durch äußere Einwirkung aus der Kathode ausgelöst. Wegen des kleinen  $N_0$  kann jetzt nicht mehr mit dem Mittelwert  $N_0 \cdot \mu^{k-1}$  für die Lawinenzahl in der  $k$ -ten Generation gerechnet werden. Im folgenden Abschnitt soll untersucht werden, wie lange nach dem Start dieses Elektrons noch das Spiel der Elektronenlawinen in der Entladungsstrecke läuft. Daraus ergibt sich zwangsläufig eine Angabe über die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Elektron zur Zündung der Entladungsstrecke führt. Anschließend wenden wir uns der Struktur der Mikroketten zu. Dabei wird die Frage behandelt, wie eine Kette von z.B. 10 Generationen Dauer abläuft, wieviel Lawinen also in jeder einzelnen Generation zu erwarten sind.

#### *Die Verteilung der Generationenzahl von Lawinenketten.*

Es werde mit  $K_n$  die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daß eine Kette aus *mindestens*  $n$  Generationen besteht. Aus *genau*  $n$  Generationen besteht eine Kette dann mit der Wahrscheinlichkeit  $K_n - K_{n+1}$ . Die Numerierung der Generationen beginnt mit 1 bei der von außen ausgelösten Lawine. Mit der Wahrscheinlichkeit  $\omega_k$  treten dann in der zweiten Generation  $k$  Folgelawinen auf [vgl. Gl. (15) und (16)]. Soll die Gesamtkette mindestens  $n+1$  Generationen umfassen, so muß jedenfalls eine der  $k$  Nachfolgelawinen Ausgangspunkt einer Kette von mindestens  $n$  Generationen sein. Mit der Wahrscheinlichkeit  $(1 - K_n)$  bricht aber eine Kette vor der  $n$ -ten Generation ab. Also wird mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - (1 - K_n)^k$  mindestens eine Kette der  $k$  Nachfolger die  $n$ -te Generation erreichen. Die Gesamtkette umfaßt dann mindestens  $n+1$  Generationen. Für  $K_n$  gilt somit die Rekursionsformel

$$K_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k (1 - (1 - K_n)^k). \quad (28)$$

Entnimmt man  $\omega_k$  der Gl. (16), so erhält man

$$\frac{1}{K_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\mu \cdot K_n}.$$

Da jede Kette mindestens aus einer Generation besteht, ist  $K_1 = 1$  und man erhält

$$\left. \begin{aligned} K_n &= \frac{1/\mu - 1}{1/\mu^n - 1} & \text{für } \mu \neq 1 \\ K_n &= 1/n & \text{für } \mu = 1. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Die Fig. 8 zeigt  $K_n$  als Funktion von  $\mu$ .

Bildet man  $K_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$ , so findet man die „Zündwahrscheinlichkeit“<sup>1</sup>

$$\left. \begin{aligned} K_\infty &= 0 & \text{für } \mu \leq 1 \\ K_\infty &= 1 - 1/\mu & \text{für } \mu > 1. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Es besteht also für  $\mu > 1$  eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit, daß ein einzelnes Elektron eine Lawinenkette auslöst, die nicht wieder

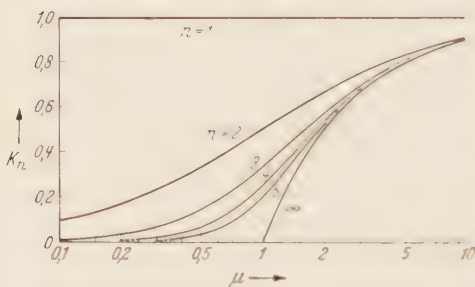


Fig. 8. Die Wahrscheinlichkeit  $K_n$ , daß eine Lawinenkette von mindestens  $n$  Generationen auslöst.

abreißt. Damit ist die Entladung selbständig geworden. Wie hieraus deutlich hervorgeht, bedeutet die „Zündbedingung“  $\mu > 1$  nicht, daß auch jedes aus der Kathode ausgelöste Elektron zur Zündung führt.

#### Die Struktur der Lawinenketten.

Wie Gl. (29) zeigt, treten längere Lawinenketten mit beachtlicher Wahrscheinlichkeit auf, sobald  $\mu$  in die Nähe des Wertes 1 kommt. So führen z. B. bei  $\mu = 0.9$  bereits 6% aller Primärelektronen zu Ketten von über 10 Generationen Dauer. Unter der Struktur der Lawinenketten soll nun folgendes verstanden werden: Wir betrachten bei festem  $\mu$  alle Lawinenketten von genau  $k$  Generationen Dauer und fragen, wieviel Lawiner werden im Mittel in der  $k$ -ten Generation gleichzeitig laufen.

An den Anfang unserer Rechnung stellen wir die Angabe der Wahrscheinlichkeit  $W(k, m)$ , daß überhaupt in der  $k$ -ten Generation einer Kette  $m$  Lawinen laufen.

$$\left. \begin{aligned} W(k, 0) &= \frac{\mu^{k-1} - 1}{\mu^k - 1} \\ W(k, m) &= \mu^{k-1} \cdot \left( \frac{\mu - 1}{\mu^k - 1} \right)^2 \cdot \left( \frac{\mu^k - \mu}{\mu^k - 1} \right)^{m-1} & \text{für } m \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

<sup>1</sup> Diese Zündwahrscheinlichkeit wird bei WILSMAN [7] auf etwas anderem Wege abgeleitet.



Für  $\mu = 1$  gehen diese Formeln über in

$$\left. \begin{aligned} W(k, 0) &= 1 - 1/k \\ W(k, m) &= \frac{(k-1)^{m-1}}{k^{m+1}} \quad \text{für } m \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Der Beweis der Formeln (31) wird durch vollständige Induktion geführt. In der  $(k-1)$ -ten Generation laufen mit der Wahrscheinlichkeit  $W(k-1, v)$   $v$  Lawinen. Diese erzeugen mit der Wahrscheinlichkeit  $U(v, m)$  genau  $m$  Folgelawinen in der  $k$ -ten Generation der Kette.  $U(v, m)$  wird aus Gl. (16) berechnet und zwar ist<sup>1</sup>

$$\left. \begin{aligned} U(0, 0) &= 1, \quad U(0, m) = 0 \quad (m \neq 0) \\ U(v, m) &= \binom{v-1+m}{m} \frac{\mu^m}{(1+\mu)^{v+m}} \quad (v \neq 0). \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Für  $W(k, m)$  erhält man durch Summation über alle  $v$  die Rekursionsformel

$$W(k, m) = \sum_{v=0}^{\infty} W(k-1, v) \cdot U(v, m).$$

Da die Lawinenketten stets mit einer Primärlawine beginnen sollen, ist  $W(1, 1) = 1$  und  $W(1, m) = 0$  für  $m \neq 1$ .

Um die Wahrscheinlichkeit  $W(r, k, m)$  zu bestimmen, daß in einer  $r$ -gliedrigen Kette in der  $k$ -ten Generation  $m$  Lawinen laufen, ist noch zu ermitteln, ob die in  $k$ -ter Generation auftretenden  $m$  Lawinen auch zu einer  $r$ -gliedrigen Kette gehören. Dazu ist erforderlich, daß sich die  $m$  Lawinen noch weiter über genau  $r-k$  Generationen fortpflanzen. Dies geschieht in der Weise, daß mindestens einer der  $m$  Lawinen eine Kette von genau  $s = r - k$  Generationen bildet, während die anderen Lawinen zu höchstens  $s$ -gliedrigen Ketten führen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ergibt sich zu

$$w(m, s) = (1 - K_{s+1})^m - (1 - K_s)^m. \quad (34)$$

Es ist nämlich  $(1 - K_s)$  die Wahrscheinlichkeit, daß eine von einer Lawine ausgehende Kette die  $s$ -te Generation nicht erreicht. Damit  $m$  Lawinen sich genau bis zur  $s$ -ten Generation fortpflanzen, darf keine der  $m$  Einzelketten die  $(s+1)$ -te Generation erreichen  $((1 - K_{s+1})^m)$ . Davon abzuziehen sind die Fälle, wo alle  $m$  Einzelketten nicht bis in die  $s$ -te Generation gelangen  $((1 - K_s)^m)$ .

Mit der in (29) angegebenen Darstellung für  $K_s$  folgt

$$\left. \begin{aligned} w(m, s) &= \left( \frac{\mu^s - 1}{\mu^{s+1} - 1} \right)^m - \left( \frac{\mu^{s-1} - 1}{\mu^s - 1} \right)^m \quad (\mu \neq 1) \\ w(m, s) &= \frac{s^2 m - (s^2 - 1)m}{1 \cdot s \cdot 1 \cdot m \cdot m} \quad (\mu = 1). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Nach den obigen Ausführungen folgt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$W(r, k, m) = \frac{W(k, m) \cdot w(m, r+1-k)}{\sum_{m=1}^{\infty} W(k, m) \cdot w(m, r+1-k)}. \quad (36)$$

<sup>1</sup> Siehe Anhang 2.

Um eine Aussage über den mittleren Verlauf einer  $r$ -gliedrigen Kette zu erhalten wäre dann gemäß

$$\bar{m}(k, r) = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot W(r, k, m) \quad (37)$$

der Mittelwert von  $m$  zu bilden. Setzt man die allgemein gültigen Darstellungen von  $W(r, k, m)$  und  $\bar{m}(m, r-1-k)$  s. Gl. (34) und (35) in (36) bzw. (37) ein, so erhält man zunächst recht unübersichtliche Formeln. Da die Bildung endlicher Lawinenketten praktisch nur in der Umgebung von  $\mu=1$  gut zu beobachten ist, bedeutet es keine wesentliche Einschränkung, wenn man sich auf diese Umgebung beschränkt. Setzt man

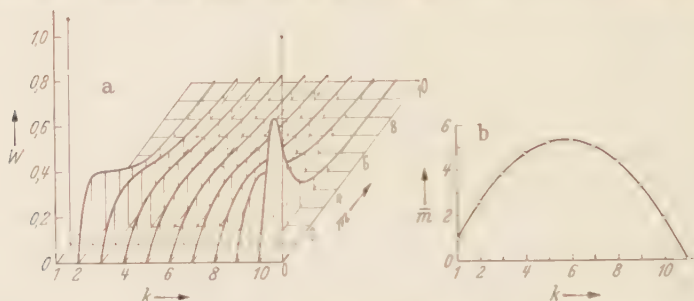


Fig. 9 a u. b. Darstellung des Ablaufs einer Lawinenkette von  $r=10$  Generationen a) durch die Wahrscheinlichkeiten  $W(r, k, m)$  für das Auftreten von  $m$  Lawinen in der  $k$ -ten Generation; b) durch die mittlere Lawinenzahl  $\bar{m}(k, r)$  in der  $k$ -ten Generation.

$\mu = 1 + \varepsilon$  und entwickelt  $W(r, k, m)$  nach Potenzen von  $\varepsilon$ , so verschwindet das in  $\varepsilon$  lineare Glied. Dies bedeutet insbesondere, daß  $\bar{m}(k, r)$  für  $\mu=1$  ein Extremum annimmt: es handelt sich um ein Maximum und folglich in der Umgebung von  $\mu=1$  nur geringe Änderung zeigt. Für  $\mu=1$  findet man

$$W(r, k, m) = \frac{(r+1) \cdot r}{k(k-1)} \cdot \binom{k-1}{m} \left\{ \binom{r+1-k}{r+2-k}^m - \binom{r-k}{r+1-k}^m \right\} \quad (38)$$

und

$$\bar{m}(k, r) = (2k-1 + k/r)(1 - k/r + 1). \quad (39)$$

Bei festem  $r$  stellt  $\bar{m}(k, r)$  eine Parabel dar. Bei nicht zu kleinem 2 liegt das Maximum etwa bei  $k=r/2+1$  und nimmt rund den Wert  $r/r$  an. In Fig. 9 sind als Beispiel für eine zehngliedrige Lawinenkette die Wahrscheinlichkeiten  $W(10, k, m)$  über  $k$  und  $m$  aufgetragen. Außerdem ist die Kurve  $\bar{m}(k, 10)$  eingezeichnet. Dieses Schaubild zeigt deutlich die starke Streuung von  $m$  um den Mittelwert  $\bar{m}$ . In der letzten Generation ( $k=10$ ) findet man eine starke Häufung bei  $m=1$  und 2, denn die größeren Lawinenzahlen haben nur eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit, keine neuen Elektronen auszulösen.

Beobachtungen des Verfassers<sup>1</sup> an einer unselbständigen Entladung in unmittelbarer Nähe der Zündspannung können als Mikroketten der hier beschriebenen Art gedeutet werden. Dabei handelt es sich um Ketten von etwa 100 Generationen Dauer.

## V. Die zündende TOWNSEND-Entladung.

Es wurde gezeigt, daß im Falle  $\mu > 1$  ein einzelnes Elektron mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - 1/\mu$  die Zündung der Entladungsstrecke herbeiführt. Betrachten wir nur solche Ketten, die zur Zündung führen, so können wir wieder bestimmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit  $Z(k, m)$  in der  $k$ -ten Generation  $m$  Lawinen auftreten. Damit die Entladung zündet, muß mindestens eine dieser Lawinen Ausgangspunkt einer unendlich langen Kette sein. Dies ist mit der Wahrscheinlichkeit  $z(m)$  der Fall.

$$z(m) = 1 - (1/\mu)^m. \quad (40)$$

*Beweis.* Eine Lawine führt mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - K_\infty = 1/\mu$  nicht zur Zündung [s. Gl. (30)]. Die Wahrscheinlichkeit, daß von  $m$  Lawinen keine zündet ist  $(1/\mu)^m$ . Mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - (1/\mu)^m$  wird also mindestens eine der  $m$  Lawinen die Zündung herbeiführen.

Analog wie bei den endlichen Ketten wird nun nach der Formel

$$Z(k, m) = \frac{W(k, m) \cdot z(m)}{\sum_{m=1}^{\infty} W(k, m) \cdot z(m)} \quad (41)$$

berechnet. Setzt man hierin (31) und (40) ein, so erhält man als Endergebnis

$$Z(k, m) = \frac{\mu^{k-1} (\mu - 1)}{(\mu^k - 1)^2} \cdot (\mu^m - 1) \cdot \left( \frac{\mu^{k-1} - 1}{\mu^k - 1} \right)^{m-1}. \quad (42)$$

Der mittlere Verlauf der zündenden Entladung wird durch den Mittelwert von  $m$  als Funktion von  $k$  beschrieben:

$$\bar{m}(k) = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot Z(k, m). \quad (43)$$

Die Auswertung mit Hilfe von (42) ergibt

$$\bar{m}(k) = \frac{\mu^{2k-1} - 1}{\mu^{k-1} (\mu - 1)}. \quad (44)$$

Für große  $k$  (genauer für  $\mu^{2k-1} \gg 1$ ) kann diese Formel noch etwas vereinfacht werden:

$$\bar{m}(k) \approx \mu^k / (\mu - 1). \quad (45)$$

<sup>1</sup> Wird in Kürze veröffentlicht.

Ohne Berücksichtigung der hier dargelegten Verteilungen rechnet man in der  $k$ -ten Generation einer von einem Elektron ausgehenden Entladung mit im Mittel  $\mu^{k-1}$  Lawinen. Der tatsächliche Mittelwert ist nach (45) um etwa den Faktor  $\mu$  ( $\mu - 1$ ) größer. Dieser Faktor ist aber nur dann wesentlich von Eins verschieden, wenn  $\mu$  nur wenig größer als Eins ist, wie es bei sehr kleinen Überspannungen der Fall ist. Unter diesen Umständen ist auch ein Einfluß auf die Berechnung der Aufbauzeit der TOWNSEND-Entladung möglich. In Fig. 10 ist der mittlere Verlauf der Lawinenzahl pro Generation einer durch ein Elektron gestarteten

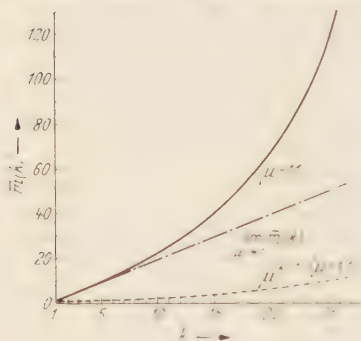


Fig. 10. Mittlerer Verlauf  $\bar{m}(k)$  einer durch ein einzelnes Elektron gestarteten TOWNSEND-Entladung. Zum Vergleich die Kurve  $\mu^{k-1}$ , die sich ohne Berücksichtigung der Statistik ergeben würde.

TOWNSEND-Entladung für  $\mu = 1,1$  nach Gl. (44) dargestellt. Außerdem ist noch der Verlauf für  $\mu \rightarrow 1$  eingezeichnet. Der Vergleich mit der Kurve  $\mu^{k-1}$  für  $\mu = 1,1$  zeigt den großen Einfluß der statistischen Verteilung auf das Anwachsen der Entladung. Eine experimentelle Prüfung dieser Zusammenhänge ist relativ einfach durchführbar, indem man den Strom der zündenden Entladung beim statischen Durchbruch oszillographiert. Damit nur ein einzelnes Elektron die Zündung herbeiführt, ist nur extrem schwache Bestrahlung der Entladungsstrecke anzuwenden.

### Die Verteilung der Aufbauzeit.

Als Aufbauzeit der Entladung bezeichnen wir die Zeit, die vom Start der Primärlawine vergeht, bis in einer Generation die Lawinenzahl  $m$  einen kritischen Wert  $N$  überschreitet. Bei diesem kritischen Wert  $N$  wird die Entladung auf Grund der Raumladungswirkung entscheidend umgebildet.  $N$  liegt je nach den Entladungsbedingungen in der Größenordnung  $10^6$  bis  $10^{10}$ – $10^8$ . Die Aufbauzeit wird hier in Vielfachen des zeitlichen Abstandes zweier Generationen ausgedrückt. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Zündung bis zur  $k$ -ten Generation einschließlich erfolgt, wird durch

$$W_i(k) = \sum_{m=N}^{\infty} Z(k, m) \quad (46)$$

gegeben. Diese Formel erfaßt von allen Ketten, die einmal mehr als  $N$  Lawinen in einer Generation führen nur solche, die auch ohne die zündungsfördernde Wirkung der Raumladung unendlich lang würden. Die hierbei vernachlässigten Fälle sind aber extrem unwahrscheinlich<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Die Wahrscheinlichkeit ist kleiner als  $\mu^{-N}$ , bei  $N = 10^6$ ,  $\mu = 1,001$  also kleiner als  $10^{-434}$ .



Setzt man nun  $Z(k, m)$  nach Gl. (42) ein<sup>1</sup>, so erhält man

$$W_z(k) = \frac{1}{1 - 1/\mu^{k-1}} \cdot \left( \frac{1 - 1/\mu^{k-1}}{1 - 1/\mu^k} \right)^N. \quad (47)$$

Da  $W_z(k)$  erst dort wesentlich von Null verschieden wird, wo  $\mu^k$  etwa die Größenordnung von  $N$  erreicht, also groß gegen Eins wird, können wir die Näherung  $(1 - 1/\mu^k) = e^{-1/\mu^k}$  benutzen und erhalten

$$W_z(k) = \exp \left( -\frac{\mu - 1}{\mu^k} \cdot N \right). \quad (48)$$

Für eine übersichtlichere Darstellung der Verteilungen ist es zweckmäßig, in der Skala der Generationenzahl einen Bezugspunkt  $k_0$  von der ungefähren Größe der Aufbauzeit zu definieren:

$$k_0 = \frac{\ln N \cdot (\mu - 1)}{\ln \mu}. \quad (49)$$

Setzt man dies  $k_0$  in (48) ein, so erhält man

$$W_z(k) = \exp \left( -\mu^{-(k-k_0)} \right). \quad (50)$$

Die Verteilung der Aufbauzeit wird also unabhängig von den speziellen Werten von  $N$  und  $\mu$ , wenn man  $(k - k_0) \cdot \ln \mu$  als unabhängige Variable wählt. Die zugehörige Häufigkeitsverteilung (differentielle Verteilung) der Aufbauzeiten (s. Fig. 11) lautet:

$$w_z(k) = \frac{d}{dk} W_z(k) = \ln \mu \cdot \mu^{-(k-k_0)} \cdot \exp \left( -\mu^{-(k-k_0)} \right). \quad (51)$$

Berechnet man den Mittelwert  $\bar{k}$  der Aufbauzeit gemäß der Definition  $\bar{k} = \int_0^\infty k \cdot dW_z(k)$ , so findet man die Beziehung

$$(\bar{k} - k_0) \cdot \ln \mu = C = 0,577. \quad (52)$$

Dabei ist  $C$  die EULERSche Konstante. Die mittlere Aufbauzeit der TOWNSEND-Entladung aus einem einzelnen Elektron ist also durch

$$\bar{k} = \frac{\ln(e^C \cdot N \cdot (\mu - 1))}{\ln \mu} \quad (53)$$

gegeben. Berechnet man dagegen die Aufbauzeit  $k_1$  ohne Berücksichtigung der Statistik, so setzt man einfach  $\mu^{k_1-1} = N$  und erhält  $k_1 = \frac{\ln N \cdot \mu}{\ln \mu}$ .

<sup>1</sup> Dabei wird in dem Faktor  $(\mu^m - 1)$  die 1 gestrichen, da in der Summe (46) stets  $\mu^m \geq \mu^N \gg 1$  ist. So ist z. B. in dem ungünstigsten Fall  $N = 10^6$ ,  $\mu = 1,001$   $\mu^N = 10^{434}$ .

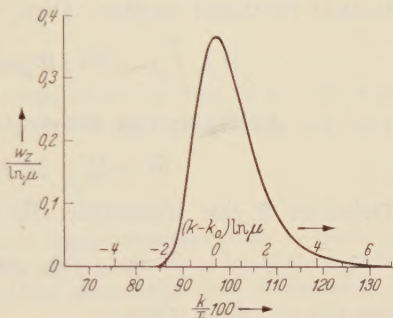


Fig. 11.

Die Häufigkeitsverteilung der Aufbauzeit einer TOWNSEND-Entladung. Die Skala „ $k/\bar{k} \cdot 100$ “ gilt für den Fall, daß  $\ln(N \cdot (\mu - 1)) = 18$  ist.



Eine wesentliche Abweichung von dem Mittelwert  $\bar{k}$  ist nur in der Nähe von  $\mu=1$  zu erwarten. Nimmt man  $N=10^8$  an, so ist bei  $\mu=1,1$  bzw.  $\mu=1,01$  der Wert von  $k_1$  etwa 11 bzw. 30% größer als  $\bar{k}$ . Da aber die bisher gemessenen und berechneten Aufbauzeiten um etwa einen Faktor 2 differierten, kommt dieser Abweichung noch keine große Bedeutung zu.

Abschließend soll noch die mittlere quadratische Streuung der Aufbauzeit bestimmt werden. Diese ist definiert durch

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (k - \bar{k})^2 dW_x = \int_0^{\infty} k^2 dW_x - \bar{k}^2 = \overline{k^2} - \bar{k}^2. \quad (54)$$

Für den Mittelwert von  $k^2$  erhält man

$$\overline{k^2} = k_0^2 + 2C k_0 / \ln \mu + B / (\ln \mu)^2. \quad (55)$$

Dabei ist  $B$  eine Konstante, die durch

$$B = \int_0^{\infty} (\ln x)^2 \cdot e^{-x} dx \approx 1,98$$

gegeben ist. Nach (52) ist

$$\overline{k^2} = k_0^2 + 2C k_0 / \ln \mu + C^2 / (\ln \mu)^2.$$

Somit finden wir für die Streuung  $\sigma$  die Beziehung

$$\sigma = \frac{\sqrt{B - C^2}}{\ln \mu} \approx \frac{1,28}{\ln \mu}. \quad (56)$$

Die relative Streuung der Aufbauzeit  $\sigma/\bar{k}$  beträgt dann etwa 5 bis 8% und ist ziemlich unabhängig von  $N$  und  $\mu$ .

### Anhang I.

Im Abschnitt II wurde gezeigt, daß für  $n_0 \gg 1$  die Lawinengröße  $n$  der Verteilung

$$v(n, d) = \frac{1}{n_0} \cdot e^{-n/n_0}, \quad n_0 = e^{\alpha d} \quad (57)$$

unterworfen ist. Welche Verteilung  $v(m, N, d)$  gilt nun für die Gesamtzahl  $N$  der Elektronen von  $m$  Lawinen?

Für die Verteilung  $f(x)$  der Summe von zwei unabhängigen statistischen Variablen mit den Verteilungen  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  gilt nach CRAMÉR [12]

$$f(x) = \int_{x_1=-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) \cdot f_2(x - x_1) dx_1. \quad (58)$$

Mit Hilfe dieser Formel findet man z.B. für zwei Lawinen

$$\begin{aligned} v(2, N, d) &= \int_0^N \frac{1}{n_0} \cdot e^{-n/n_0} \cdot \frac{1}{n_0} \cdot e^{-(N-n)/n_0} dn \\ &= \frac{1}{n_0} \cdot \left( \frac{N}{n_0} \right) \cdot e^{-N/n_0}. \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion ergibt sich

$$v(m, N, d) = \frac{1}{n_0} \cdot \frac{1}{(m-1)!} \cdot \left(\frac{N}{n_0}\right)^{m-1} \cdot e^{-N/n_0}. \quad (59)$$

Ersetzt man  $m$  durch  $n_1$ ,  $N$  durch  $n$  und  $d$  durch  $d-x$ , so erhält man die in Abschnitt II angegebene Formel (7)

$$v(n_1, n, d-x) = e^{-\alpha(d-x)} \cdot \frac{(n \cdot e^{-\alpha(d-x)})^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \cdot \exp(-n \cdot e^{-\alpha(d-x)}).$$

## Anhang 2.

Löst eine Lawine im Mittel  $\mu$  Nachlieferungselektronen aus, so war die Wahrscheinlichkeit, daß  $k$  Elektronen ausgelöst werden, gegeben durch

$$\omega_k = \frac{\mu^k}{(1+\mu)^{k+1}}. \quad (16)$$

Laufen nun statt einer Lawine  $v$  Lawinen in der Entladungsstrecke, so werde mit  $U(v, m)$  die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daß insgesamt  $m$  Nachlieferungselektronen erzeugt werden. Da sich die Lawinen gegenseitig nicht beeinflussen, ist

$$U(v, m) = \sum U(1, k_1) \cdot U(1, k_2) \cdot \dots \cdot U(1, k_v). \quad (60)$$

Dabei ist über alle Produkte zu summieren, für die  $\sum_{i=1}^v k_i = m$  gilt. Führt man durch

$$\mathfrak{U}(v, t) = \sum_{m=0}^{\infty} U(v, m) \cdot t^m \quad (61)$$

die erzeugende Funktion  $\mathfrak{U}(v, t)$  der Verteilung  $U(v, m)$  ein, so folgt aus (60)

$$\mathfrak{U}(v, t) = (\mathfrak{U}(1, t))^v. \quad (62)$$

Nach (16) ist

$$U(1, m) = \omega_m = \frac{\mu^m}{(1+\mu)^{m+1}}.$$

und damit

$$\mathfrak{U}(1, t) = \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\mu t}{1+\mu}}. \quad (63)$$

Für  $\mathfrak{U}(v, t)$  ergibt sich nach (62) und (63)

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}(v, t) &= \frac{1}{(1+\mu)^v} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{1+\mu} \cdot t\right)^{-v} \\ &= \frac{1}{(1+\mu)^v} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{-v}{m} \cdot \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^m \cdot t^m. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich mit (61) ergibt

$$U(v, m) = (-1)^m \binom{-v}{m} \cdot \frac{\mu^m}{(1+\mu)^{m+v}}.$$

Da

$$(-1)^m \binom{-v}{m} = \binom{v-1+m}{m}$$

folgt die bei (33) angegebene Darstellung

$$U(\nu, m) = \binom{\nu - 1 + m}{m} \frac{\mu^m}{(1 + \mu)^{m+\nu}}$$

für  $(\nu \neq 0)$ . Die dort noch angegebenen Werte

$$U(0, 0) = 1, \quad U(0, m) = 0 \quad (m \neq 0)$$

folgen als Trivialitäten aus der Definition von  $U(\nu, m)$ .

Diese Arbeit wurde als Diplomarbeit am Institut für Angewandte Physik der Universität Hamburg angefertigt. Dem Leiter des Institutes, Herrn Professor Dr. H. RAETHER, danke ich für das ständige Interesse an dieser Arbeit und für anregende Diskussionen.

### Literatur.

- [1] BRAUNBEK, W.: Z. Physik **39**, 6 (1926). — [2] HERTZ, G.: Z. Physik **106**, 102 (1937). — [3] WIJSMAN, R. A.: Phys. Rev. **75**, 833 (1949). — [4] MORTON, P. L.: Phys. Rev. **70**, 358 (1946). — [5] MASCH, K.: Arch. Elektrotechn. **26**, 587 (1932). — [6] KRUTHOF, A. A., and F. M. PENNING: Physica, Haag **3**, 515 (1936). — [7] CURRAN, S. C., A. L. COCKROFT and J. ANGUS: Phil. Mag., Ser. 7 **40**, 929 (1949). — [8] LAUER, E. J.: J. Appl. Phys. **23**, 300 (1952). — [9] RAETHER, H.: Z. angew. Phys. **5**, 211 (1953). — [10] SCHADE, R.: Z. Physik **104**, 487 (1937). — [11] SAUTER, F.: Z. Naturforsch. **4a**, 682 (1949). — [12] CRAMÉR, H.: Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press 1951.

*Hamburg, Institut für Angewandte Physik der Universität.*